Ch10 Infinite Sequences and Series

10.1 Sequences

من المعروف أن المتتابعات هي قائمة من الأعداد المرتبة، وتكتب على الصورة

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

مثال ذلك، متتابعة الأعداد الأولية

$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$

التعريف الرياضي للمتتابعة أنها دالة مجالها الأعداد الطبيعية، حيث صورة 1 هو a_1 وصورة 2 هو a_2 وبشكل عام صورة n هو العنصر a_n، التعريف التالي يوضح التعريف العام لها.

Def: An infinite sequence (or sequence) of numbers is a fun whose domain is the set of integers grater than or equal to some integer n_0.

عادة نأخذ $n_0 = 1$ ويكون المجال هو في هذه الحالة الأعداد الطبيعية، وقد يكون غير ذلك.
تسمى $a(1) = a_1$ بالحد الأول (first term) و $a(2) = a_2$ بالحد الثاني،
وبشكل عام يسمى $a(n) = a_n$ بالحد النوني (nth-term) وتسمى n بـ index.

Examples: (1) The seq $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $a_n = a(n) = \sqrt{n}$ has first term $a_1 = \sqrt{1}$, second term $a_2 = \sqrt{2}$ and we can write it in the form

$$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$$

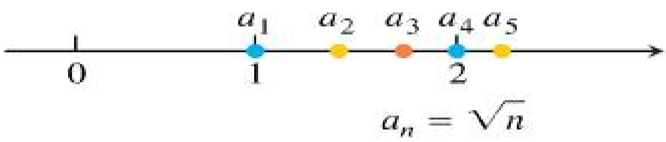
(2) The sequence $\{b_n\} = \{(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\}$ has the form

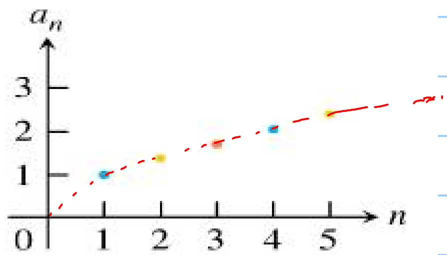
$$\{b_n\} = \{1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \dots\}$$

رسم المتتابعات

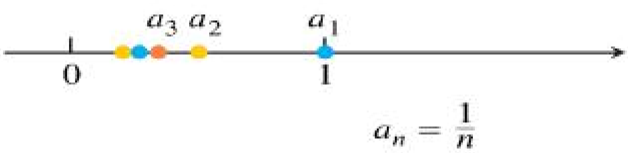
توجد طريقتين للتعبير عن المتتابعات هندسياً، الأولى برسمها كدالة مجالها الأعداد الطبيعية كما الدوال، والطريقة الثانية برسمها على خط الأعداد كما توضح الأمثلة التالية:

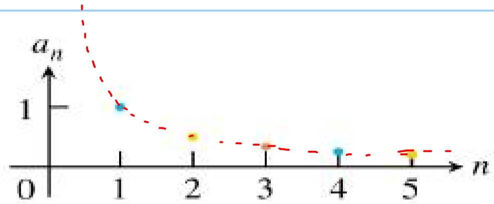
1) $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}$



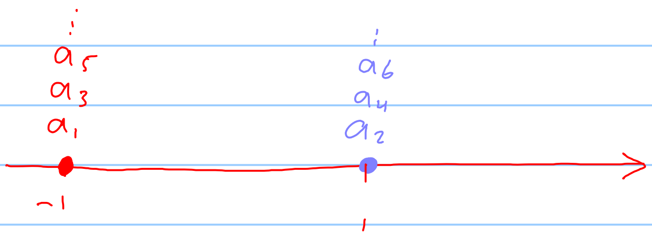


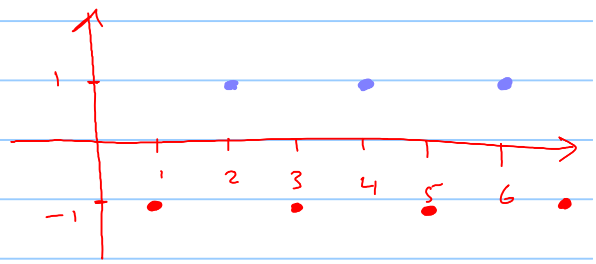
2) $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$





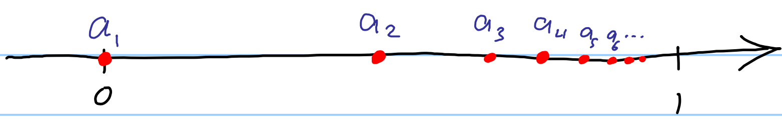
3) $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$





Convergence and Divergence

إذا قمنا بدراسة المتتابعة $\{a_n\} = \{\frac{n-1}{n}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$



سنجد أنه كلما كبرت n كلما تقاربت قيم المتتابعة من الرقم 1 / في هذه الحالة / نقول أنه المتتابعة تقاربية لـ 1 (converges to 1) / في هذه الحالة نكتب

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ أو $\lim \frac{n-1}{n} = 1$

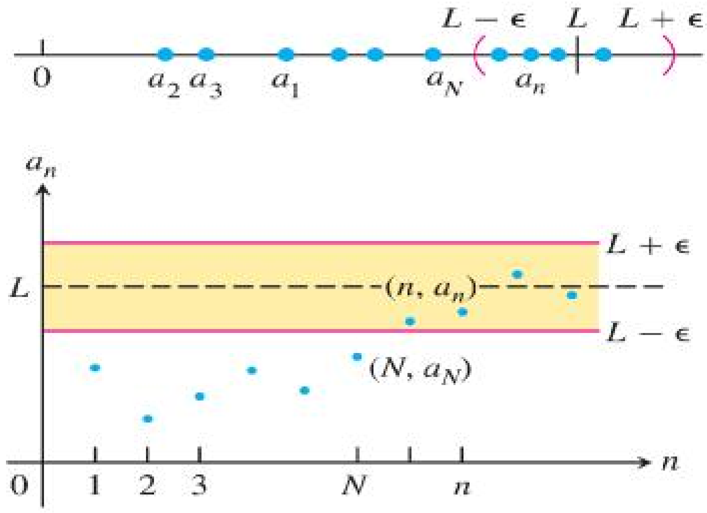
أو $\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1$ as $n \longrightarrow \infty$

أو $\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1$

DEFINITIONS The sequence $\{a_n\}$ **converges** to the number L if for every positive number ϵ there corresponds an integer N such that for all n,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

If no such number L exists, we say that $\{a_n\}$ **diverges**.



Examples:

1) $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ converges to 0

so $\lim \frac{1}{n} = 0$

2) $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ diverges

3) $\{a_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ diverges

4) $\{a_n\} = \{k\} = \{k, k, k, \dots\}$ converges to k,

so $\lim k = k$.

ملحوظة: في المثال السابق/ لاحظ أن التباعد في 2 يختلف عنه في 3 / حيث أن حدود المتتابعة في المثال (3) تتزايد في قيمتها بلا حدود عندما $n \to \infty$ بينما قيم حدود المتتابعة في المثال (2) تبقى محدودة ، و للتمييز بين الحالتين / يمكن القول أن المتتابعة في المثال الثالث تتباعد لـ ∞ (diverges to ∞) ، ونكتب $\lim n = \infty$

Recursive Definitions: (Inductive Defs)

لاحظ أن الطريقة المعتادة لتعريف المتتابعات هو باستخدام قانون الحد العام للمتتابعة. توجد طريقة أخرى لتعريف المتتابعات استقرائياً (recursively) كالتالي:

1) إعطاء قيمة (قيم) مبدئية للحد أو الحدود الأولى من المتتابعة.

2) إعطاء قانون استقرائي لحساب حدود المتتابعات اللاحقة بدلالة الحدود السابقة.

المثال التالي يوضح هذه الجزئية في تعريف المتتابعات.

Examples: 1) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$, $n \geq 2$

$\Rightarrow a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 2 + 1 = 3$,

$a_4 = 3 + 1 = 4$, $a_5 = 4 + 1 = 5$, and so on.

Thus, $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

لاحظ في هذا المثال أنه يمكن إستنتاج الحد العام: $a_n = n$ وبالتالي

نستطيع إيجاد $a_{100} = 100$ مباشرة دون حساب الحدود التي تسبقه

2) $a_1 = 1$, $a_n = n\, a_{n-1}$, $n \geq 2$

$\Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2!$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3! = 4!$, and so on.

لاحظ أيضاً أننا في هذا المثال استطعنا أن نوجد قانون عام $a_n = n!$ وبالتالي

$$\{a_n\} = \{1, 2!, 3!, 4!, \ldots, n!, \ldots\}$$

3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, and $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$

so $a_3 = a_2 + a_1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 3$, $a_5 = a_4 + a_3 = 5$

and so on, we get

$$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

لاحظ هنا أن صيغة الحد العام من هذه المتتابعة ليس واضحاً، وعليه، إذا أردنا إيجاد a_{100}، يجب أن نوجد جميع الحدود التي تسبقه

Calculating Limits of Sequences

THEOREM 1 Let $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ be sequences of real numbers, and let A and B be real numbers. The following rules hold if $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ and $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

1. *Sum Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. *Difference Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. *Constant Multiple Rule:* $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (any number k)
4. *Product Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
5. *Quotient Rule:* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ if $B \neq 0$

Examples: Use the facts that $\lim \frac{1}{n} = 0$ and $\lim K = K$ to evaluate the following limits:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-5}{n}\right) = -5 \lim \frac{1}{n} = -5 * 0 = \boxed{0}$

2) $\lim\left(\frac{5}{n^2}\right) = 5 \lim\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = 5 * \lim\frac{1}{n} * \lim\frac{1}{n}$
$= 5 * 0 * 0 = \boxed{0}$

3) $\lim\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim 1 - \lim\frac{1}{n} = 1 - 0 = \boxed{1}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim \frac{\left(\frac{4}{n^6}\right) - 7}{1 + \left(\frac{3}{n^6}\right)} = \frac{0-7}{1+0} = \boxed{-7}$

THEOREM 2—The Sandwich Theorem for Sequences Let $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, and $\{c_n\}$ be sequences of real numbers. If $a_n \le b_n \le c_n$ holds for all n beyond some index N, and if $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, then $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ also.

Examples: Find the following limits:

1) $\lim \frac{\cos n}{n}$

Sol: For each $n \in \mathbb{N}$, $-1 \le \cos n \le 1$, so

$$\frac{-1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$$

since $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, by Sandwich Thrm

$$\lim \frac{\cos n}{n} = 0.$$

2) $\lim \frac{(-1)^n}{n}$

Sol: For each $n \in \mathbb{N}$, $-1 \le (-1)^n \le 1$, so

$$\frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

As above example since, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, by Sandwich Thrm

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

3) Since $2^n > n \;\forall n \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \;\forall n$,

so we have that $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$.

since $\lim 0 = 0 = \lim \frac{1}{n} \Longrightarrow$ by Sandwich Thrm, $\lim \frac{1}{2^n} = 0$

4) $\lim \frac{n!}{n^n}$

<u>sol:</u> For each $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot \cancel{1}}_{\text{عددهم } n \text{ / الرقم الأخير 1 / رقم معنوي لا تأثير له /}} \le \underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot \cdots n}_{\text{عددهم } n-1} = n^{n-1}$$

الرقم الأول n هو أكبر الأرقام

$$\Longrightarrow \quad 0 < \frac{n!}{n^n} \le \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

$$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0 \qquad \downarrow 0$$

by Sandwich Thrm $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

THEOREM 3—The Continuous Function Theorem for Sequences Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers. If $a_n \to L$ and if f is a function that is continuous at L and defined at all a_n, then $f(a_n) \to f(L)$.

Illustrations:

1) $\lim \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim \frac{n+1}{n}} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

2) $\lim \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 = \left(\lim \frac{2n+1}{n-1}\right)^2 = 2^2 = \boxed{4}$

3) $\lim \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = \ln\left(\lim \frac{2n+1}{2n-1}\right) = \ln 1 = \boxed{0}$

L'Hôpital's Rule

THEOREM 4 Suppose that $f(x)$ is a function defined for all $x \ge n_0$ and that $\{a_n\}$ is a sequence of real numbers such that $a_n = f(n)$ for $n \ge n_0$. Then

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Examples: Find the following Limits:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$

الحل: نلاحظ أن الدالة $\frac{\ln x}{x}$ معرفة لكل قيم $x \geq 1$ ، وهي تتوافق مع
المتتابعة المعطاه عند الأعداد الصحيحة الموجبة ، وبالتالي حسب النظرية السابقة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \boxed{0}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \ln 2}{5} = \infty$

ملاحظة: بشكل عام الاشتقاق للمتتابعات بالنسبة للمتغير n غير موجود لأنه من
تعريف الاشتقاق أن نأخذ النهاية عندما $h \to 0$ ، وهذا غير ممكن في المتتابعات (
ولكن للتسهيل تم حساب المثال الثاني السابق باستخدام قوانين الاشتقاق بالنسبة
لـ n لتوفير تحويلها لـ x على أساس الاعتبار التالي :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{5x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{5} = \infty$$

وبهذا فإن اعتبار n هو متغير متصل القيم فإن النتيجة تكون صحيحة وكاملة ،

3) $\lim \sqrt[n]{n}$ (∞^0)

Consider $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \lim \frac{\ln n}{n} = 0$

so $\lim \sqrt[n]{n} = e^0 = 1.$

So the seq $\{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots\}$ converges to 1.

4) For each $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim x^{\frac{1}{n}} = 1.$

PF: Consider $\lim \ln(x^{\frac{1}{n}}) = \lim \frac{\ln x}{n} = 0 \Rightarrow$

$\lim x^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$

[For Example: the seq $\{2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots\}$

converges to 1]

5) For each $x \in \mathbb{R}$, $\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

PF: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad (1^\infty)$

Consider $\lim \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\overset{L.R}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)\cdot x \cdot \cancel{\left(\frac{-1}{n^2}\right)}}{\cancel{\left(\frac{-1}{n^2}\right)}} = x$$

so, $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

[For Examples: $\left(1-\frac{3}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-3}$, and

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \left(1+\frac{(-\frac{1}{2})}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-1/2}$$]

Some Basic limits:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \qquad (x>0)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (|x|<1)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{any } x)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0 \qquad (\text{any } x)$

In Formulas (3) through (6), x remains fixed as $n \to \infty$.

Examples:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100^n}{n!} = 0$ (part 6).

2) $\lim \sqrt[n]{2n^2} = \lim\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^2}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\right)$

$= 1 \cdot 1^2 = 1.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n \quad (1^\infty)$

Sol: يمكن حل السؤال باستخدام نظرية لوبيتال / ويمكن باستخدام الفقرة
(5) من النهايات الأساسية بعد إعادة الترتيب كالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^n = \lim \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{1}{n})^n} = \frac{e^1}{e^{-1}} = \boxed{e^2}$$

Bounded Monotonic Sequences

DEFINITIONS A sequence $\{a_n\}$ is **bounded from above** if there exists a number M such that $a_n \leq M$ for all n. The number M is an **upper bound** for $\{a_n\}$. If M is an upper bound for $\{a_n\}$ but no number less than M is an upper bound for $\{a_n\}$, then M is the **least upper bound** for $\{a_n\}$. ($\sup_n a_n$)

A sequence $\{a_n\}$ is **bounded from below** if there exists a number m such that $a_n \geq m$ for all n. The number m is a **lower bound** for $\{a_n\}$. If m is a lower bound for $\{a_n\}$ but no number greater than m is a lower bound for $\{a_n\}$, then m is the **greatest lower bound** for $\{a_n\}$. ($\inf_n a_n$)

If $\{a_n\}$ is bounded from above and below, the $\{a_n\}$ is **bounded**. If $\{a_n\}$ is not bounded, then we say that $\{a_n\}$ is an **unbounded** sequence.

Illustrations:

1) The sequence of natural numbers $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ has no upper bound. But it is bounded from below by every real number less than or equal to 1. In fact 1 is the greatest lower bound, so

$$\boxed{\inf_n n = 1}$$

2) The sequence $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ is bounded above by every real number grater than or equal to 1. Moreover, 1 is the least upper bound of $\{\frac{n}{n+1}\}$, so

$$\sup_n \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = 1 .$$

On the other hand, every real number less than or equal to $\frac{1}{2}$ is a lower bound, and $\inf_n \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}$

Thrm: Any convergent sequence is bounded seq.

ملحوظات: ١- النظرية تكافئ النص التالي: "إذا كانت المتتابعة غير محدودة من أعلى أو غير محدودة من أسفل فإنها ستكون متباعدة".

٢- عكس النظرية غير صحيح / فإذا كانت المتتابعة محدودة / فإنها ليس بالضرورة تقاربية / ومثال ذلك:

$$\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\} = \{1,-1,1,-1,\dots\}$$

هي متتابعة محدودة، ولكن غير تقاربية.

DEFINITION A sequence $\{a_n\}$ is **nondecreasing** if $a_n \le a_{n+1}$ for all n. That is, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots$. The sequence is **nonincreasing** if $a_n \ge a_{n+1}$ for all n. The sequence $\{a_n\}$ is **monotonic** if it is either nondecreasing or nonincreasing.

Illustrations:

1) The sequence of natural numbers $\{1,2,3,\dots\}$ is nondecreasing.

2) The seq $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ is nonincreasing.

3) The seq $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\dots\}$ is nondecreasing seq.

4) The constant seq $\{2\} = \{2,2,2,\dots\}$ is both nondecreasing and nonincreasing seq.

Moreover, all of the four seqs are monotonic

5) The seq $\{\frac{(-1)^n}{n}\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ is not monotonic.

THEOREM 6—The Monotonic Sequence Theorem If a sequence $\{a_n\}$ is both bounded and monotonic, then the sequence converges.

ملحوظات: ١- عكس النظرية غير صحيح / فإذا كانت المتتابعة متقاربة / فليس بالضرورة أن تكون monotonic / ومثال ذلك المتتابعة $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ تقاربية / ولكن ليست monotonic.

٢- في حال كانت المتتابعة غير متناقصة فإنها بالتأكيد محدودة من أسفل بالحد الأول / ولذلك لإثبات أنها محدودة يكفي إثبات أنها محدودة من أعلى فقط / وبالمثل إذا كانت غير تزايدية.

Example: show that the seq $\{a_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+1}\right\}$ is bounded and monotonic, then find its limit.

sol: $a_n' = \frac{(n+1)\cdot 3 - (3n+1)\cdot 1}{(n+1)^2} = \frac{2}{(n+1)^2} > 0 \quad \forall n$

so a_n is $\nearrow$. So it is bded below by $a_1 = 2$.

Moreover $\frac{3n+1}{n+1} = \frac{3n+3-2}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1} < 3 \quad \forall n$

so it is bded above by 3. Therefore the seq is bounded and monotonic so it is convergent seq.

$$\lim \frac{3n+1}{n+1} = 3.$$

ملحق

Evaluate the limits:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-1/4)}{n}\right)^{n}\right]^{3}$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1/4)}{n}\right)^{n}\right]^{3} = \left(e^{-1/4}\right)^{3} = e^{-3/4}.$$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{3n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right) n.\sin\left(\pi/3n\right)$$

Consider $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}$, and

$\lim_{n\to\infty} n.\sin\left(\frac{\pi}{3n}\right)\ (\infty.0) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin \pi/3n}{\left(\frac{1}{n}\right)}\ \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\overset{L.R.}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{3n} * \pi/3 * \cancel{\left(\frac{-1}{n^2}\right)}}{\cancel{\left(\frac{-1}{n^2}\right)}} = \pi/3.$$

So $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{3n+1}\right)\sin\left(\pi/3n\right) = \frac{1}{3} * \pi/3 = \boxed{\pi/9}$

3) Show that the seq $\{a_n\} = \left\{\frac{(2n+3)!}{(n+1)!}\right\}$ is monotonic. Is it bded??

sol: من هذا المثال لا يصح استخدام فكرة الاشتقاق لإثبات monotonic.

Consider $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)+3)!}{((n+1)+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{(2n+5)!\ (n+1)!}{(n+2)!\ (2n+3)!}$

$$= \frac{(2n+5)\overset{2}{\cancel{(2n+4)}}\cancel{(2n+3)!}\ \cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+2)}\ \cancel{(n+1)!}\ \cancel{(2n+3)!}} = 2(2n+5) = 4n+10 > 1$$

$\therefore a_{n+1} > a_n$ and hence the seq is nondecreasing.

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة محدودة أم لا ، نلاحظ بداية أنها غير متناقصة وعليه فإنها بالتأكيد محدودة من أسفل وما يتبقى علينا فحصه هو كونها محدودة من أعلى .

أثبتنا من الجزء الأول أن $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4n+10$ لذا نلاحظ ما يلي

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4n+10 > 10 \Rightarrow a_{n+1} > 10\, a_n$$

طبعد هذه العلاقة استقرائياً نحصل على

$\forall n$

$$a_{n+1} > 10\, a_n > 10^2 a_{n-1} > 10^3 a_{n-2} > \cdots > 10^n a_1$$

لكن $a_1 = \frac{5!}{2!} = 60$ وبالتالي

$$\forall n, \quad a_{n+1} > 60 * 10^n \longrightarrow \infty$$

وبالتالي واضح أن المتتابعة غير محدودة من أعلى ، لذا فهي غير محدودة ومن ثم غير تقاربية .