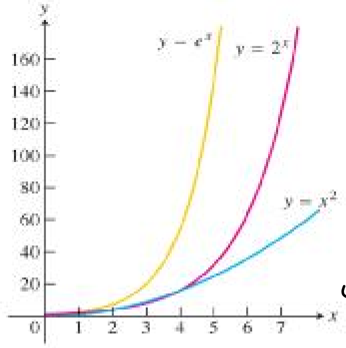
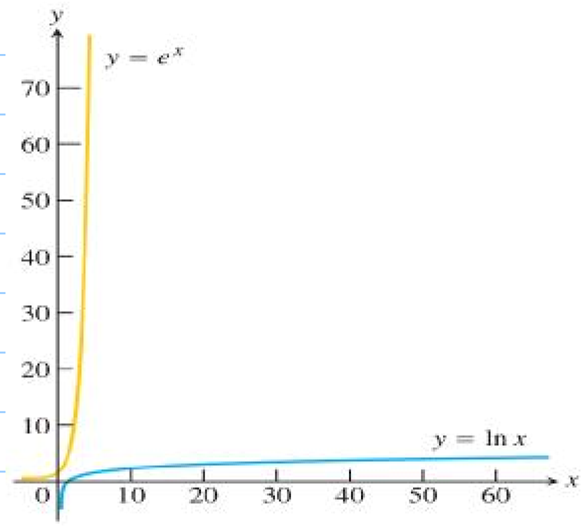
7.8 Relative Rates of Growth :



مقدمة : لعلك تلاحظ أن الدوال الأسية مثل $y=e^x$ ، $y=2^x$ تنمو بشكل أسرع مما يحدث مع الحدوديات عندما $x \to \infty$.
والحقيقة أن نمو الدوال الأسية مثل e^x أسرع من نمو الدالة $x^n = y$ لأي n عدد طبيعي حتى $y = x^{1000000}$. في المقابل فإن الدوال اللوغاريتمية لها نمو بطيء مقارنة بالحدوديات

ولكي نكون إنطباع عن مفهوم النمو للدوال ، خذ الدالتين $y=e^x$ ، $y=\ln x$ مع ترقيم محوري x ، y بوحدة cm .



وبالأرقام : عندما $x=1$ فإن $y=e^1 \simeq 3\,cm$
عندما $x=6$ فإن $y=e^6 \simeq 403\,cm$
عندما $x=10$ فإن $y=e^{10} \simeq 220\,m$
عندما $x=24$ فإن $y=e^{24}\,cm$ وهي مسافة إرتفاع تتعدى نصف المسافة بين الأرض والقمر .
عندما $x=43$ فإن مسافة الإرتفاع تصل لأقرب نجم لمجموعتنا الشمسية ،
في المقابل فإننا إذا أردنا إيجاد قيمة x التي توصل الدالة $y=\ln x$ للإرتفاع 43 cm نلاحظ أن

$$\ln x = 43 \Rightarrow x = e^{43}$$

وهي نفس المسافة التي تحدثنا عنها قبل قليل ، وهي مسافة إذا أردنا قطعها على محور x إبتداءً من نقطة الأصل وبسرعة الضوء فإننا بحاجة إلى 4.5 سنة تقريباً للوصول للقيمة $x=e^{43}$.

التعريف الرياضي التالي يوضح مفهوم ما معنى أن يكون نمو الدالة $y = f(x)$ أسرع
من نمو الدالة $y = g(x)$.

DEFINITION **Rates of Growth as $x \to \infty$**

Let $f(x)$ and $g(x)$ be positive for x sufficiently large.

1. **f grows faster than g as $x \to \infty$ if**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

or, equivalently, if

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

We also say that g **grows slower than** f as $x \to \infty$.

2. f and g **grow at the same rate** as $x \to \infty$ if

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

where L is finite and positive.

بهذا التعريف / لاحظ أن الدالة $y=2x$ لا تنمو أسرع من $y = x$ لأن

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

وذلك لأن مفهوم أن تكون f أسرع من g أنه عندما تكون x كبيرة فإنه بالمقارنة تكون قيمة $g(x)$ مهملة ولا تذكر مقارنة بقيمة $f(x)$.

Examples: Which of the following pair funs grow faster and which grow at the same rate.

1) $f(x) = x$, $g(x) = 1000x$

Sol:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f}{g} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1000x} = \frac{1}{1000},$$

so $f(x), g(x)$ grow at the same rate as $x \to \infty$.

2) $f(x) = e^x$, $g(x) = x^n$ (n is positive integer)

sol:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\,x^{n-1}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)\,x^{n-2}} \overset{L.R}{=} \cdots$$

$$\overset{L.R}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!\; x^0} = \infty$$

so e^x grows faster than x^n for any + integer n.

3) $f(x) = e^x$ and $g(x) = 3^x$

sol:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^x = 0$$

[الفكرة أن $0 < \frac{e}{3} < 1$ وأن $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ حيث $0 < a < 1$]

so e^x grows slower that 3^x as $x \longrightarrow \infty$

4) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$.

sol: $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = 0$$

so $f(x) = \ln x$ grows slower than $g(x) = x$ as $x \to \infty$.

5) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$, $g(x) = (2\sqrt{x} - 1)^2$

sol:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{(2\sqrt{x}-1)^2}$$ (بالقسمة على x بسطاً ومقاماً)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + 5/x^2}}{\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1}}{2^2} = \frac{1}{4}$$

so f and g grow at the same rate

End of Ch 7