10.8 Taylor and Maclaurin Series

Note Title ٢٣/٠٥/٢٨

في هذا الفصل سنوضح كيفية توليد متسلسلة قوى من دالة $f(x)$ لها مشتقات من كل الرتب عند نقطة a، هذه المتسلسلات تسمى متسلسلات تايلر، وفي حال تقاربها توفر حدوديات تقريب للدالة المولدة لها، لذا فإن لمتسلسلات تايلر أهمية كبيرة عند كثير من الرياضيين.

DEFINITIONS Let f be a function with derivatives of all orders throughout some interval containing a as an interior point. Then the **Taylor series generated by f at $x = a$** is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

The **Maclaurin series generated by f** is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

the Taylor series generated by f at $x = 0$.

ملحوظة: جاء هذا التعريف بهذه الطريقة لتتوافق قيمة المتسلسلة ومشتقاتها عند a مع قيمة الدالة المولدة $f(x)$ ومشتقاتها عند a (تأكد من ذلك).

DEFINITION Let f be a function with derivatives of order k for $k = 1, 2, \dots, N$ in some interval containing a as an interior point. Then for any integer n from 0 through N, the **Taylor polynomial of order n** generated by f at $x = a$ is the polynomial

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Examples:

1) Find the Taylor series and the Taylor polynomial of the fun $f(x) = e^x$ at $x = 0$. (Maclaurin Series)

Sol: The Taylor series generated by e^x at $x=0$ has the form $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$

$$f(x) = e^x \longrightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \longrightarrow f''(0) = 1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^{(k)}(x) = e^x \longrightarrow f^{(k)}(0) = 1$$

So the Taylor Series of e^x at $x=0$ is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

and the Taylor polynomial of degree n is

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} .$$

2) Find the Taylor series of $f(x) = \frac{1}{x}$ at $x = 2$.

Sol: The Taylor series at $x=2$ has the form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \longrightarrow f(2) = \frac{1}{2}$$
$$f'(x) = -x^{-2} \longrightarrow f'(2) = -2^{-2}$$
$$f''(x) = 2x^{-3} \longrightarrow f''(2) = 2 \cdot 2^{-3}$$
$$f'''(x) = -2\cdot 3 \cdot x^{-4} \longrightarrow f'''(2) = -2\cdot 3 \cdot 2^{-4}$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k!\, x^{-(k+1)} \longrightarrow f^{(k)}(2) = (-1)^k k!\, 2^{-(k+1)} .$$

So the Taylor series is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!\, 2^{-(k+1)}}{k!} (x-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (x-2)^k$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \cdots$$

3) Find the Taylor series of $f(x) = 3^{-x}$ at $x = 1$.

Sol: The Taylor series has the form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots$$

$$f(x) = 3^{-x} \longrightarrow f(1) = 3^{-1}$$

$$f'(x) = -3^{-x}\ln 3 \longrightarrow f'(1) = -3^{-1}\ln 3$$

$$f''(x) = 3^{-x}\ln^2 3 \longrightarrow f''(1) = 3^{-1}\ln^2 3$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\, 3^{-x}\ln^k 3 \longrightarrow f^{(k)}(1) = (-1)^k\, 3^{-1}\ln^k 3$$

so the Taylor series is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln^k 3}{3\; k!}(x-1)^k$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{3\;1!}(x-1) + \frac{\ln^2 3}{3\;2!}(x-1)^2 - \frac{\ln^3 3}{3\;3!}(x-1)^3 + \cdots$$

4) i) Find the Maclaurin series of $f(x) = \cos x$.

Sol: The Maclaurian series has the form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$f(x) = \cos x \longrightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \longrightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \longrightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \longrightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$\therefore$ The Maclaurin Series of $\cos x$ is

$$1 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

ii) Use part (i) to find the Maclaurin series of the funs $y = \sin x$ and $y = x\sin x$.

Sol: لاحظ بداية أنه يمكن إيجاد المطلوب مباشرة للدالة $y=\sin x$ (انظر المحاضرة)
ولكن مع توفر متسلسلة ماكلورين للدالة $y = \cos x$ / يمكن الاستفادة منها كالتالي:

$$\sin x = -\frac{d}{dx}\cos x = -\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n\,x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

تختلف في الصورة عن المحور ولكن المسألة واحدة (Reindex)

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (*)$$

بالنسبة للدالة $y = x\sin x$ / فإن الحل المباشر لها طويل وصعب لصعوبة المشتقات العليا / ولكن باستخدام (*) / نجد أن

$$x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!}.$$

iii) Using part (i), the Taylor series of the fun $y = \sin x$ at $x = \pi/2$ is

$$\sin x = \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\overset{(i)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

لاحظ أنه يمكن حل الفرعية (iii) بسهولة بشكل مباشر.

ملحوظ

Find the Maclaurin series of

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Sol: لاحظ هنا أنه الحسابات المباشرة للإشتقاقه للدالة $\frac{\sin x}{x}$ طويلة ومزعجة ولدينا إشكالية تعويض عند $x=0$ / لذا سنحاول إيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \sin x$ ، ولأنه الحد الأول منها صفراً فإنه يمكن أخذ x عامل مشترك منها ثم إختصاره مع $\frac{1}{x}$ كالتالي:

Let $g(x) = \sin x$ with Maclaurin series of the form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} x + \frac{g''(0)}{2!} x^2 + \frac{g'''(0)}{3!} x^3 + \cdots$$

$$g(x) = \sin x \longrightarrow g(0) = 0$$
$$g'(x) = \cos x \longrightarrow g'(0) = 1$$
$$g''(x) = -\sin x \longrightarrow g''(0) = 0$$
$$g'''(x) = -\cos x \longrightarrow g'''(0) = -1$$
$$g^{(4)}(x) = \sin x \longrightarrow g^{(4)}(0) = 0$$
$$g^{(5)}(x) = \cos x \longrightarrow g^{(5)}(0) = 1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$\therefore$ The Maclaurin series of $\sin x$ is

$$0 + \frac{1}{1!} x + 0 - \frac{1}{3!} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + 0 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$\therefore$ the Maclaurin series of the fun $\frac{\sin x}{x}$ is

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

2) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Sol: الحساب المباشر لمتسلسلة ماكلورين أيضاً صعبة وطويلة / لذا سنلجأ لفكرة الإشتقاقه والتكامل لمتسلسلة القوى حد بحد. بعد الإشتقاقه نجد أنه

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = \frac{a}{1-r}$$

وهي مجموع متسلسلة هندسية ، لذا . اذا حاولنا ايجاد متسلسلة ماكلورين نجد انها متساوي

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \cdots$$

$$\therefore \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}\,dt$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

3) $f(x) = \cos^2 x$.

The series has the form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$f(x) = \cos^2 x \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin(2x) \longrightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(2x) \cdot 2 \longrightarrow f''(0) = -2$

$f'''(x) = 4\sin 2x \longrightarrow f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 8\cos 2x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 8$

$f^{(5)}(x) = -16\sin 2x \longrightarrow f^{(5)}(0) = 0$

$f^{(6)}(x) = -32\cos 2x \longrightarrow f^{(6)}(0) = -32$

$\therefore$ The Maclaurin series is

$$1 + 0 - \frac{2}{2!}x^2 + 0 + \frac{8}{4!}x^4 + 0 - \frac{32}{6!}x^6 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{4!}x^4 - \frac{32}{6!}x^6 + \cdots$$