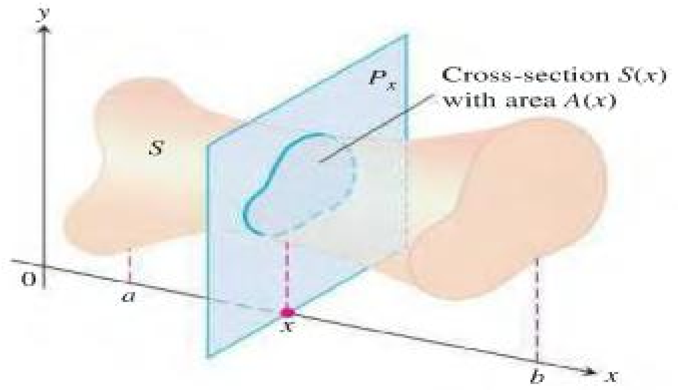
Note Title ٢٠/٠١/٢٣

Ch 6 Applications of Definite Integrals

6.1 Volumes Using Cross-Sections



لإيجاد حجم الجسم في الدراسة أوجد مساحة القطاع العرضي $A(x)$ بدلالة x،
وبالتالي يكون الحجم هو تكامل المساحة على حركته.

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

DEFINITION The **volume** of a solid of integrable cross-sectional area $A(x)$ from $x = a$ to $x = b$ is the integral of A from a to b,

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

وتسمى هذه الطريقة بـ Volume by slicing (الحجم بطريقة الشرائح).

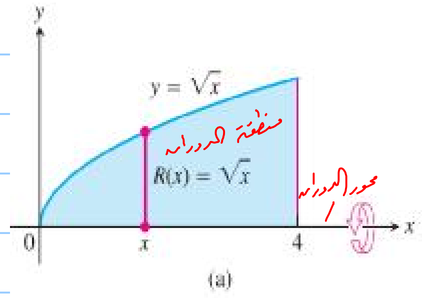
ملحوظة: في الأشكال المنتظمة مثل متوازي المستطيلات وغيره / معروف
أن الحجم يساوي المساحة × الارتفاع / وبالتالي نجد
أن طريقة إيجاد الحجم بالشرائح السابقة هي تعميم لما هو معروف
ليشمل الأشكال غير المنتظمة.

Solids of Revolution: The Disk and the Washer Methods

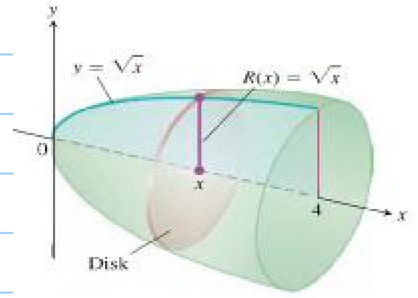
الأجسام الدورانية هي أجسام ناتجة عن دوران منطقة حول محور،
وطريقتي الـ disk / Washer هما حالات خاصة من طريقة
الحجم بالشرائح / حيث أن القطاع العرضي من الأجسام الدورانية يكون

إما قرص (disk) وإما قرص مثقوب أو ما يعرف بـ حلقة (washer).

Disk Method



بعد الدوران



في الأجسام الدورانية ، عندما لا توجد مسافة فاصلة بين منطقة الدوران وبين محور الدوران فإنه ينتج جسم مصمت ، في هذه الحالة يكون المقطع العرضي فيه قرص وبالتالي مساحة هذا القرص هي

$$A(x) = \pi\,(\text{radius})^2 = \pi\,[R(x)]^2$$

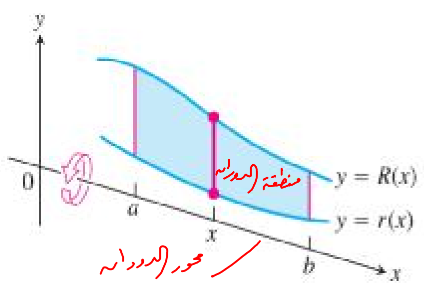
وبالتالي فإن الحجم للجسم الدوراني

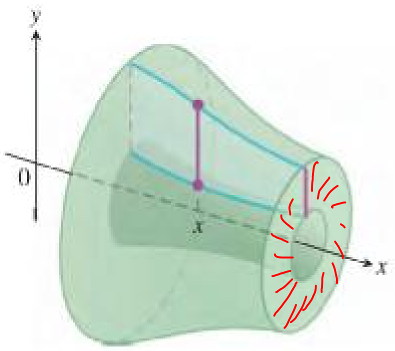
Volume by Disks for Rotation About the *x*-axis

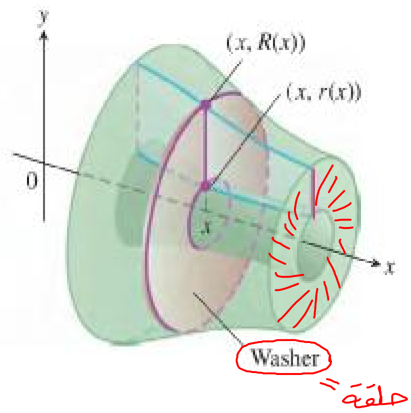
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx.$$

ملحوظة: لاحظ أن المقطع العرضي ينتج من دوران الخط المرسوم داخل منطقة الدوران **عمودياً** على محور الدوران ، في هذه الحالة ، يكون طول الخط هو نصف القطر $R(x)$.

Washer Method







عندما تكون هناك مسافة فاصلة بين منطقة الدوران وبين محور الدوران، فإن الجسم الدوراني الناتج تكون أجوف، من هذه الحالة تكون القطاع العرضي الناتج هو حلقة لها نصف قطر داخلي $r(x)$ ونصف قطر خارجي $R(x)$ وتكون مساحة هذه الحلقة

$$A(x) = \pi\left[[R(x)]^2 - [r(x)]^2\right]$$

وبالتالي فإن حجم الجسم الدوراني الأجوف بطريقة الحلقات (Washer)

Volume by Washers for Rotation About the *x*-axis

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx.$$

Where

Outer radius : $R(x)$

Inner radius : $r(x)$.

ملحوظات: ١- لاحظ أن القطاع العرضي ينتج من دوران الخط المرسوم داخل منطقة الدوران عمودياً على محور الدوران، في هذه الحالة، يكون الناتج هو حلقة (Washer).

٢- لاحظ أن طريقة الـ Disk هي حالة خاصة من طريقة Washer تكون فيها $r(x) = 0$ مما يجعل الجسم مصمتاً.

٣- لتحديد نصف القطر الداخلي $r(x)$ (inner radius) ونصف القطر الخارجي $R(x)$ (outer radius)،

أ- نرسم منطقة الدوران ونحدد محور الدوران.

ب- نرسم خط داخل منطقة الدوران عمودياً على محور الدوران وبذلك تكون

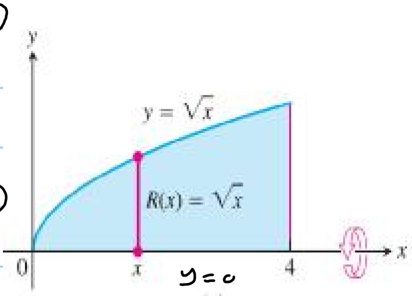
$r(x)$: المسافة بين محور الدوران وبين النقطة الأقرب على الخط المرسوم،

$R(x)$: المسافة بين محور الدوران وبين النقطة الأبعد على الخط المرسوم.

٤- عند رسم الخط داخل المنطقة عمودياً على محور الدوران، يجب كتابة معادلة المنحنيات بالطريقة المناسبة، فإن كان موازياً لمحور y يجب كتابة المعادلات على شاكلة $y = f(x)$ وإذا كان موازياً لمحور x تكتب على شاكلة $x = g(y)$.

Examples:

1) **(EXAMPLE 4)** The region between the curve $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, and the x-axis is revolved about the x-axis to generate a solid. Find its volume.



(a)

Sol: ① نرسم منطقة الدوران / ونحدد محور الدوران
واضح أنه لا توجد مسافة فاصلة بين المنطقة وبين محور الدوران /

② ارسم خط داخل المنطقة عمودياً على محور الدوران.

③ الخط يوازي محور y لذلك نكتب المعادلات بصورة $y = f(x)$:

$y = \sqrt{x}$ المنحنى الأعلى.

$y = 0$ محور الدوران

وبالتالي يكون طول الخط $R[x] = \sqrt{x} - 0$ هو نصف القطر.

(iv) حدود التكامل هي مجال حركة الخط وهي من 0 إلى 4 على محور x.

By Disk Method,

$$V = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \left. \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \boxed{8\pi}$$

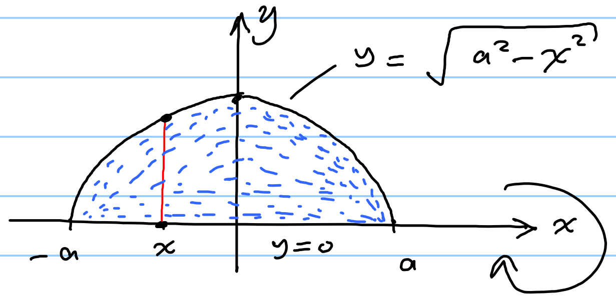
ملحوظة هامة : يمكن حل السؤال السابق باستخدام طريقة Washer حيث يكون $r(x) = 0$ (المسافة بين محور الدوران وبين النقطة الأقرب على الخط المرسوم)
وبالتالي نستطيع بطريقة Washer نحصل على نفس النتيجة.
لذلك سنستخدم طريقة Washer في جميع الأمثلة القادمة لأنها أعم.

2) **(EXAMPLE 5)** The circle

$$x^2 + y^2 = a^2$$

is rotated about the x-axis to generate a sphere. Find its volume.

Sol: نلاحظ أنه الجسم الكروي يمكن توليده من دوران النصف العلوي من الدائرة فقط وقانونه $y=\sqrt{a^2-x^2}$ ،



نلاحظ أنه لا يمكن تطبيق طرق إيجاد الحجم السابقة إلا على الدوال، وحيث أنه $x^2+y^2=a^2$ فإنه $y^2=a^2-x^2$ وعليه فإن $|y|=\sqrt{a^2-x^2}$ ، ولكن $|y|=y$ عندما $y>0$].

By Washer Method

$$r(x)=0$$

$$R(x)=\sqrt{a^2-x^2}-0 .$$

أبعد نقطة عن محور الدوران

محور الدوران

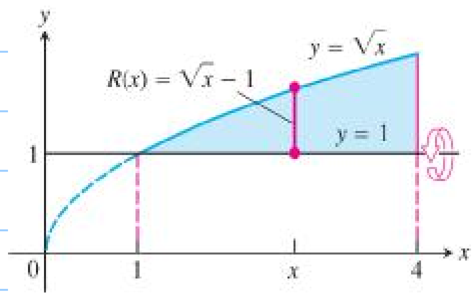
$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx=\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\boxed{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

3) **EXAMPLE 6** Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y=\sqrt{x}$ and the lines $y=1, x=4$ about the line $y=1$.

Sol: محور الدوران هو الخط $y=1$

نرسم خط داخل المنطقة عمودي على محور الدوران.

واضح أنه يوازي محور y لذلك نكتب المعادلات على صورة $y=\sqrt{x}$ ، $y=1$.



$\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$ / لايجاد حدود التكامل يجب التحديد مجال حركة الخط.

Using Washer Method:

معادلة محور الدوران   معادلة أقرب نقطة

$$r(x)=1-1=0$$

$$R(x)=\sqrt{x}-1$$

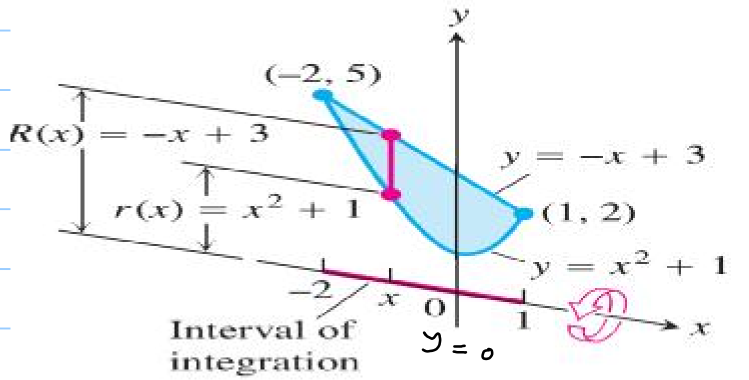
$$\Rightarrow V=\pi\int_{1}^{4}\left[\sqrt{x}-1\right]^2-0^2\,dx=\pi\int_{1}^{4}x-2\sqrt{x}+1\,dx=\frac{7\pi}{6}$$

ملحوظات: 1) في المثال السابق يمكن تطبيق طريقة القرص حيث نصف القطر
$R(x) = \sqrt{x} - 1$ يساوي طول الخط ونحصل على نفس النتيجة.

2) ايجاد نصف القطر الداخلي أو الخارجي من طريقة Washer يتم من خلال
حساب المسافة بين محور الدوران والنقطة الأقرب أو الأبعد عنه / مع طريقة طرح
معادلة المنحنى الأكبر — المنحنى الأصغر.

4) (**EXAMPLE 9**) The region bounded by the curve $y = x^2 + 1$ and the line $y = -x + 3$ is revolved about the x-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

Sol:



بعد رسم المنطقة وتحديد منطقة الدوران / ومحور الدوران / نرسم خط داخل
المنطقة عمودي على محور الدوران / موازياً لمحور y ونكتب المعادلات
$y = x^2+1 \; , \; y = 3-x$.
لإيجاد حدود التكامل (مجال حركة الخط) تقاطع المنحنيين

$$x^2+1 = 3-x \Longrightarrow x = -2, 1$$

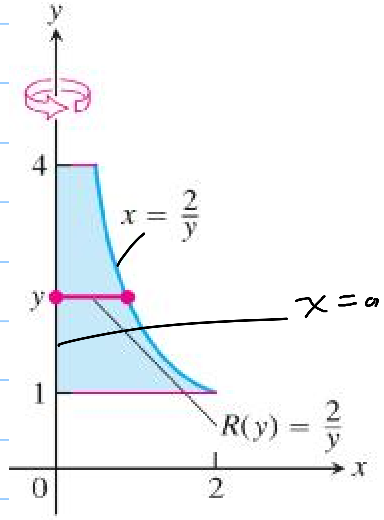
$$r(x) = x^2+1-0 \; , \quad R(x) = (3-x)-0$$

$$\therefore V = \pi \int_{-2}^{1} (3-x)^2 - (x^2+1)^2 \, dx = \pi \int_{-2}^{1} 8-6x-x^2-x^4 \, dx$$

$$= \pi \left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{1} = \boxed{\frac{117}{5} \pi}$$

5) Find the volume of the solid generated by revolving the region between y-axis, $y = \frac{2}{x}$ and $1 \le y \le 4$ about the y-axis.

Sol:



(i) ارسم منطقة الدوران وحدد محور الدوران.

(ii) ارسم خط عمودي على محور الدوران داخل المنطقة)

لاحظ انه يوازي محور x.

(iii) اكتب معادلة المنحنيات ما بصورة المناسبة $x = g(y)$:

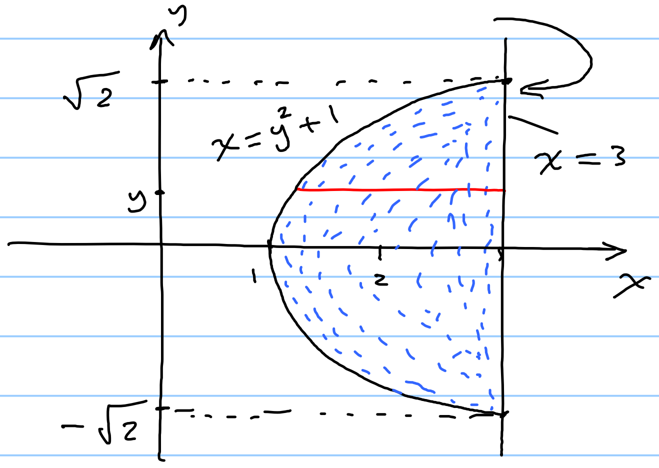
$x = 0$ (محور الدوران) and $x = \frac{2}{y}$

$r(y) = 0 \quad , \quad R(y) = \frac{2}{y} - 0.$

$$\therefore V = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 - 0^2 \, dy = 4\pi \left(\frac{-1}{y}\right]_1^4 = \boxed{3\pi}$$

6) Find the volume of the solid generated by revolving the region between the parabola $x = y^2 + 1$ and the line $x = 3$, (i) about $x = 3$. (ii) about $x = 0$.

Sol:



(i) نرسم خط داخل المنطقة عمودي

على محور الدوران موازي لمحور x،

ونكتب المعادلات للمنحنيات بصورة

$x = f(y)$. (انظر الشكل) .

لإيجاد حدود التكامل /

$y^2 + 1 = 3 \Rightarrow y^2 = 2$

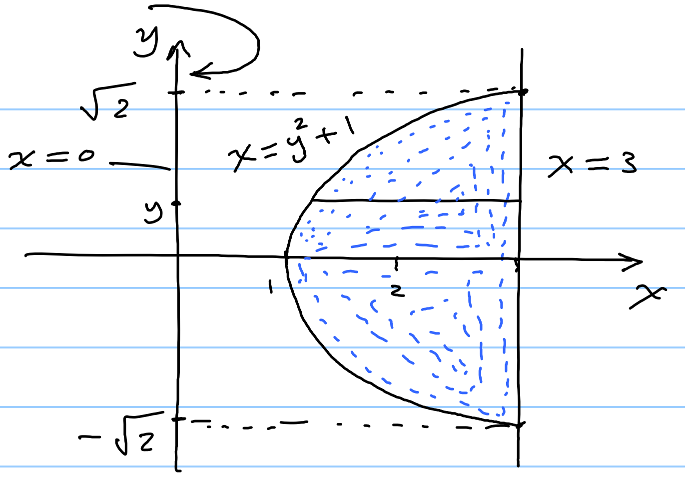
$\Rightarrow y = \mp\sqrt{2}$

By Washer Method:

$r(y) = 0 \quad , \quad R(y) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2$

$$\therefore V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^2 - 0^2 \, dy = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4 - 4y^2 + y^4 \, dy = \boxed{\frac{64}{15}\sqrt{2}\,\pi}$$

ii) By Washer Method



$r(y) = y^2+1 - 0$

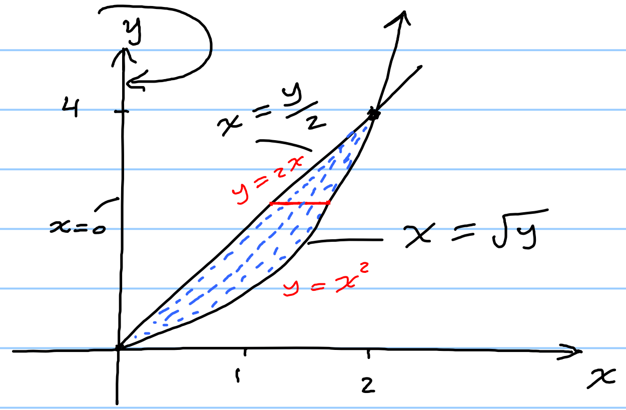
$R(y) = 3 - 0 = 3$

$$\therefore V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 3^2 - (y^2+1)^2 \, dy = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 9 - y^4 - 2y^2 - 1 \, dy$$

$$= \pi \left(8y - \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} y^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{176}{15}\pi}$$

7) (**EXAMPLE 10**) The region bounded by the parabola $y = x^2$ and the line $y = 2x$ in the first quadrant is revolved about the y-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

Sol:



ارسم خط داخل المنطقة عمودي
على محور الدوران وموازي لمحور x ، لذا
اكتب المعادلات بالصورة $x = f(y)$

حدود التكامل :

$$\frac{y}{2} = \sqrt{y} \Rightarrow y^2 = 4y \Rightarrow y = 0, 4$$

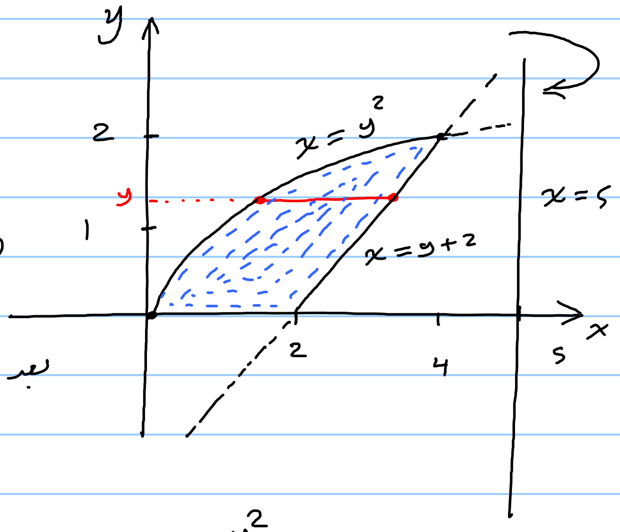
Washer Method $\quad r(y) = \frac{y}{2} - 0 \quad , \quad R(y) = \sqrt{y} - 0$

$$\therefore V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 y - \frac{y^2}{4} \, dy = \boxed{\frac{8}{3}\pi} .$$

8) Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y=\sqrt{x}$, x-axis, and $y = x-2$,
i) about $x=5$. (ii) about $y=-1$.

sol: (i)

بعد تحديد منطقة الدوران و محور الدوران / ارسم
خط داخل المنطقة عمودياً على محور الدوران / سيكون
هنا موازياً لمحور x وعليه نكتب المعادلات بصورة
$x=f(y)$. (انظر الرسمة)



بعدها تحديد حدود التكامل من مجال حركة الخط من 0 إلى 2 .

By Washer Method:

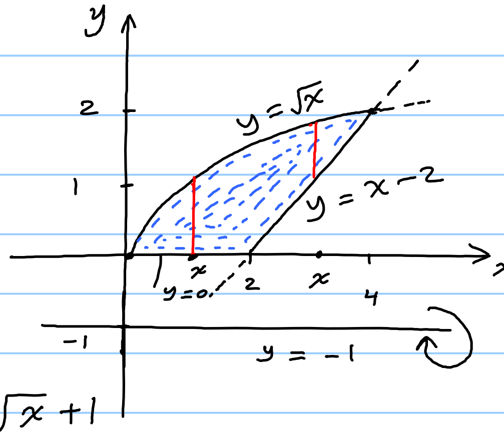
$r(y) = 5-(y+2) = 3-y$, $R(y) = 5-y^2$

$\therefore$

$$V = \pi\int_0^2 (5-y^2)^2-(3-y)^2\,dy = \pi\int_0^2 25-10y^2+y^4-9+6y-y^2\,dy$$

$$= \pi\left(16y-\frac{11}{3}y^3+\frac{y^5}{5}+3y^2\right]_0^2 = \boxed{\frac{316}{15}\pi}$$

ii) الخط داخل المنطقة عمودي على محور الدوران
يوازي محور y لذلك نغير كتابة المعادلات
بصورة $y=f(x)$.



By Washer Method:

في هذا المثال يجب التجزئة

In the interval $[0,2]$:

$r(x) = 0-(-1) = 1$, $R(x) = \sqrt{x}-(-1) = \sqrt{x}+1$

In the interval $[2,4]$:

$r(x) = (x-2)-(-1) = x-1$, $R(x) = \sqrt{x}-(-1) = \sqrt{x}+1$

$\therefore$

$$V = \pi\left[\int_0^2 (\sqrt{x}+1)^2-1^2\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x}+1)^2-(x-1)^2\,dx\right] = \boxed{12\pi}$$