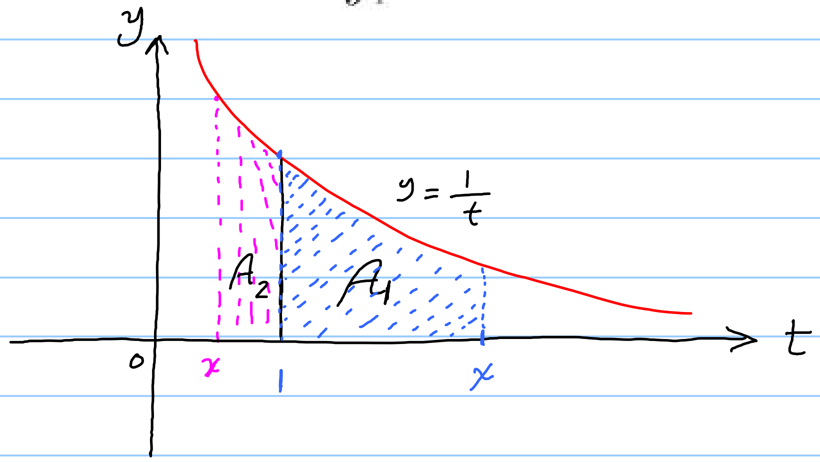
7.2 Natural Logarithms

Note Title ٢٣/٠٣/١٦

DEFINITION The **natural logarithm** is the function given by

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0.$$



ملحوظات هامة :

١- هندسياً ، نلاحظ أنه إذا كانت $x > 1$ فإن $\ln x$ تساوي
المساحة A_1 تحت المنحنى $y = \frac{1}{t}$ من 1 إلى x وبالتالي هي موجبة
وإذا كانت $0 < x < 1$ فإن $\ln x$ تمثل سالب المساحة A_2 وعليه
نحصل على

a) $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = A_1 > 0 \quad \text{if } x > 1$

b) $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -A_2 < 0 \quad \text{if } 0 < x < 1$

c) $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 .$

2- باستخدام النظرية الأساسية في التفاضل نحصل على :

أ) $y = \ln x$ هي دالة متصلة .

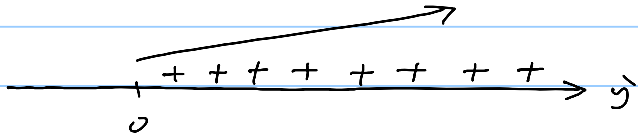
ب) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

وباستخدام قاعدة السلسلة نحصل على

$$\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}.$$

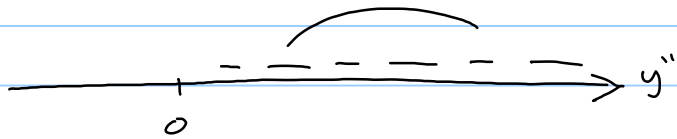
ج) باستخدام تخطيط المنحنيات وإشارات المشتقات نجد أنه

$y' = \frac{1}{x}$, $x > 0$

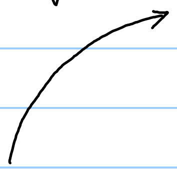


دالة $y = \ln x$ متزايدة دائماً عند $x > 0$ ،

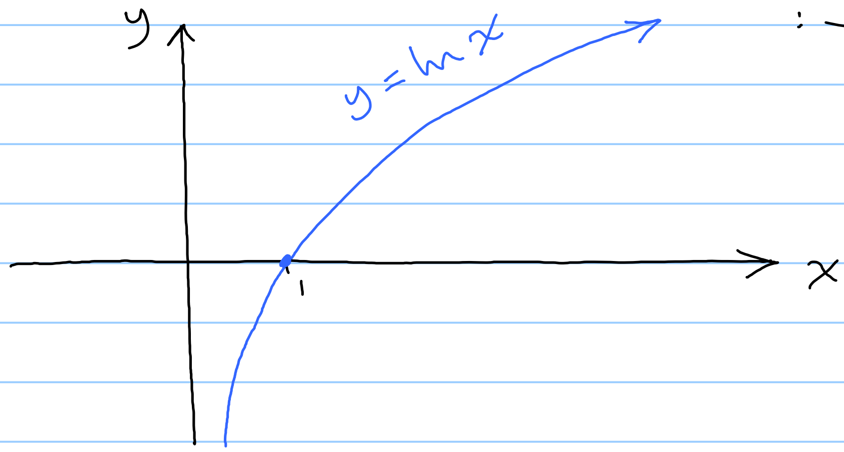
$y'' = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$



وهي محدبة لأسفل على مجالها $(0,\infty)$ وبالتالي فإن الشكل العام للدالة هو



ولذلك فإنه يمكنه رسم الدالة باستخدام المخطط العام مع المعلومات في النقطة (1) وهي $\ln 1 = 0$ ، $x>0$ ، $\ln x > 0$ ، $0<x<1$ ، $\ln x < 0$ ، كما يلي :



3) واضح من الرسم أنه

a) $D(\ln x) = (0,\infty)$ and $R(\ln x) = (-\infty,\infty)$

b) $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ and $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

4) لأن الدالة $y = \ln x$ متزايدة ، فإنها دالة 1-1 ، وهذا يعني بالضرورة وجود دالة عكسية . (سوف ندرس لاحقاً)

5) باستخدام مجموع ريمان بعمل مستطيلات وإيجاد المساحة تحت المنحنى $y = \frac{1}{t}$ من $t=1$ إلى $t=x$ وذلك لتقريب قيمة الدالة

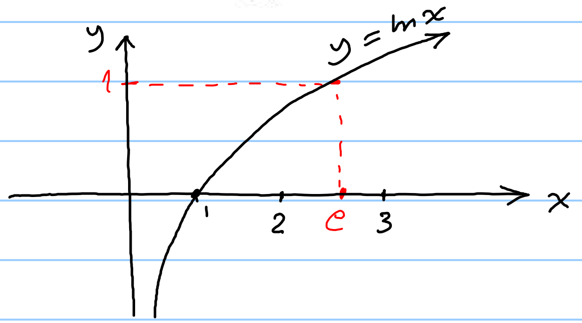
$y = \ln x$ عند تعويض بعض قيم x نحصل على الجدول التالي :

x	0	0.05	0.5	1	2	3	4	10
$\ln x$	undefined	-3.00	-0.69	0	0.69	1.1	1.39	2.3

6) نلاحظ مما حصلنا عليه في الجدول أن $\ln 2 \simeq 0.69 < 1$ وأن $\ln 3 \simeq 1.1 > 1$ ولأن
$y = \ln x$ هي دالة متصلة فإنه باستخدام نظرية IVT (القيمة الوسطية)
يوجد رقم بين $2, 3$ يأخذ قيمة $y = 1$ ، سوف نرمز له بالرمز e.
وبالتالي نحصل على التعريف التالي :

DEFINITION The **number** e is that number in the domain of the natural logarithm satisfying

$$\ln(e) = 1.$$



Examples: Find $\frac{dy}{dx}$ if

1) $y = \ln(5x^2 + 2)$

Sol: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x^2 + 2} \cdot \frac{d}{dx}(5x^2 + 2) = \frac{10x}{5x^2 + 2}$

2) $y = \ln(-x)$, $x < 0$

Sol: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Remark: Since for $x \neq 0$, $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, we get the following important result.

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Properties of Natural Logarithm:

THEOREM 2—Algebraic Properties of the Natural Logarithm For any numbers $b > 0$ and $x > 0$, the natural logarithm satisfies the following rules:

1. *Product Rule:* $\ln bx = \ln b + \ln x$
2. *Quotient Rule:* $\ln \frac{b}{x} = \ln b - \ln x$
3. *Reciprocal Rule:* $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ — Rule 2 with $b = 1$
4. *Power Rule:* $\ln x^r = r \ln x$ — For r rational

PF: 1) Note that $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

and $\frac{d}{dx}\ln(bx) = \frac{1}{bx} \cdot b = \frac{1}{x}$

So by Corollary 2 of MVT in sec 4.2, we get that

$$\ln(bx) = \ln x + C \quad \text{where } C \text{ is constant}$$

لإيجاد الثابت C عوض عن قيمة معينة لـ x . القيمة الأسهل لتعويضها $x = 1$:

$$\ln(b \cdot 1) = \ln 1 + C \Longrightarrow C = \ln b.$$

$$\therefore \ln(bx) = \ln x + \ln b$$

4) $\frac{d}{dx}(r \ln x) = r \cdot \frac{1}{x} = \frac{r}{x}$ and

$$\frac{d}{dx}(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot r x^{r-1} = \frac{r}{x}.$$

بالمثل في 1 نحصل على

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

عوض $x = 1$ نحصل على

$$\cancel{\ln 1}^{\,0} = r \cancel{\ln 1}^{\,0} + C \Longrightarrow C = 0$$

وبالتالي

$$\ln x^r = r \ln x.$$

يمكن إثبات المتطابقات (2) ، (3) بالمثل أو باستخدام ما تم اثباته في (1) ، (4)

Examples:

1) Use the Properties of logarithms to expand the following:

a) $\ln\left(\frac{4\sin x}{2x-3}\right)$

Sol: $\ln\left(\frac{4\sin x}{2x-3}\right) = \ln(4\sin x) - \ln(2x-3)$

$= \ln 4 + \ln(\sin x) - \ln(2x-3) = 2\ln 2 + \ln\sin x - \ln(2x-3)$

b) $\ln\left(\sqrt[5]{x^2-9}\right) = \ln(x^2-9)^{\frac{1}{5}}$

$= \frac{1}{5}\ln\big((x+3)(x-3)\big) = \frac{1}{5}\left[\ln(x+3) + \ln(x-3)\right].$

2) Solve for x:

$$\ln\big((2x+1)(x+2)\big) = 2\ln(x+2).$$

Sol: $\ln(2x+1) + \ln(x+2) = 2\ln(x+2)$

$\therefore \ln(2x+1) = \ln(x+2)$

since $\ln x$ is 1-1 fun $\Longrightarrow 2x+1 = x+2.$

Hence $\boxed{x=1}$

3) If $f(x) = \ln(\sqrt{x}-1)$ and $f^{-1}(a) = 4$. find a.

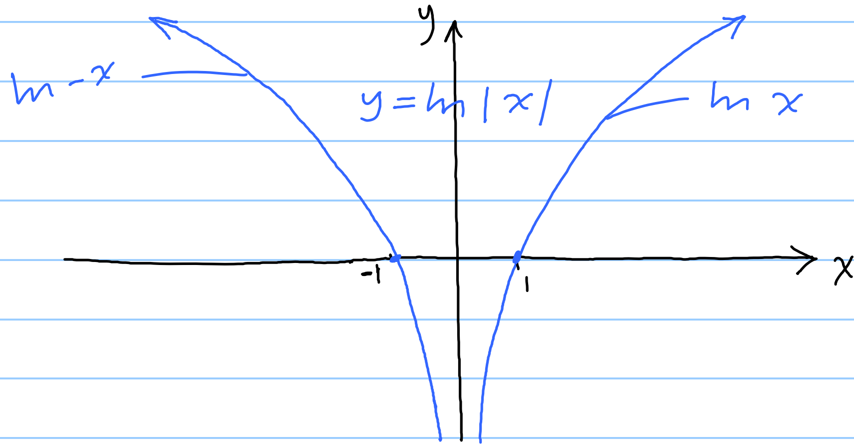
Sol: هنا نلاحظ أن f^{-1} موجودة لأن f دالة 1-1 وبالتالي
تتحقق العلاقة $f\circ f^{-1}(x) = x$. لذلك نحصل على

$a = f\circ f^{-1}(a) = f(f^{-1}(a)) = f(4) = \ln(\sqrt{4}-1) = \ln 1 = 0.$

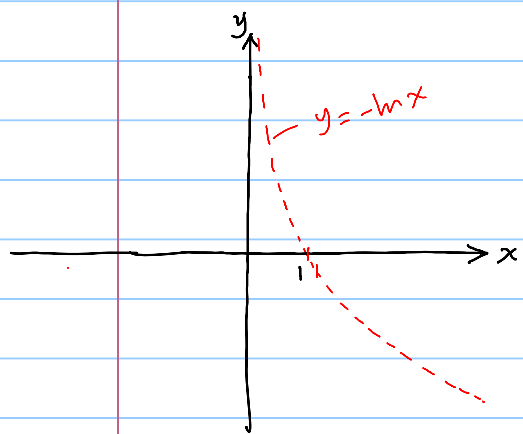
4) Graph the following funs

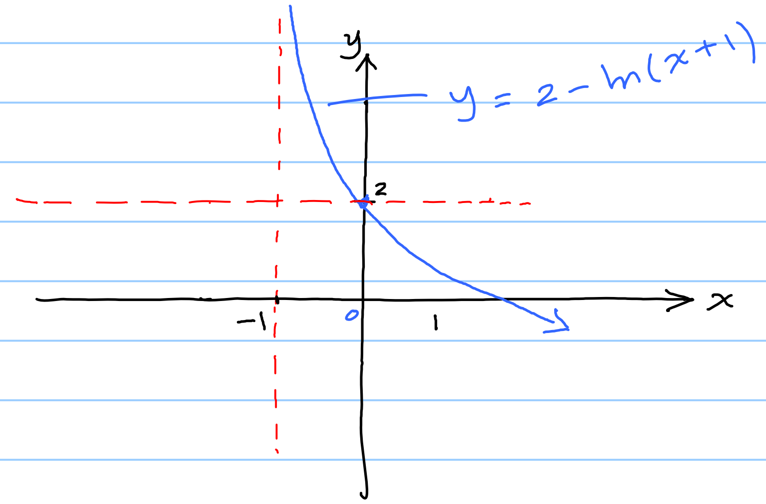
a) $y = \ln|x|$, b) $y = 2 - \ln(x+1)$.

sol: (a) واضح أن الدالة متماثلة حول محور y لأنها دالة
زوجية ، مجالها $\mathbb{R}-\{0\}$ ، وعند $x>0$ فإن $\ln|x|=\ln x$
وعند $x<0$ فإن $\ln|x|=\ln(-x)$. باستخدام التماثل نحصل على



(b) رسمة الدالة $y=2-\ln(x+1)$ مماثلة لرسمة الدالة $y=-\ln x$
بعد إزاحتها للأعلى بمقدار 2 ولليسار بمقدار 1 ،
ورسمة الدالة $y=-\ln x$ هي نفس رسمة $y=\ln x$ بعد عكسها
حول محور x وبالتالي :





Using Logarithm in Differentiation:

If $y=f(x)>0$, then we can use the properties of logarithm to find $\frac{dy}{dx}$ in simple way as follows:

1) $\ln y = \ln(f(x)) \xrightarrow{\quad} $ Expanding.

2) $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\ln(f(x))\right]$

3) $\frac{dy}{dx} = y\,(\ln f(x))' = f(x)\cdot(\ln f(x))'$.

Example: Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = \sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$.

Sol: واضح أنه الحسابات المباشرة للمشتقة $\frac{dy}{dx}$ صعبة وطويلة لذلك
سوف نستخدم اللوغاريتم الطبيعي لتسهيل الاشتقاق كالتالي :

$$\ln y = \ln\left[\sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}\right] \longrightarrow \text{Expanding}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln x + \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x^2+1) - \ln(2x+3)\right]$$

اشتق الطرفين $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+3}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+3}\right]$$

The Integral of $\int \frac{1}{u}\,du$:

We prove that $\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$ when $x > 0$, and $\frac{d\ln(-x)}{dx} = \frac{1}{x}$ when $x < 0$. So in both cases, we see that $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$. Thus, we have

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C}$$

Examples: Evaluate the following integrals:

1) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx$

sol: Take $u = x^2 - 5$, so $du = 2x\,dx$

when $x = 0 \longrightarrow u = -5$, and when $x = 2 \longrightarrow u = -1$

$$\therefore \int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big]_{-5}^{-1}$$

$$= \ln|-1| - \ln|-5| = \boxed{-\ln 5}$$

2) $$\int \frac{\sec x}{\ln(\sec x + \tan x)}\,dx$$

$u = \ln(\sec x + \tan x)$.

$$du = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \sec x\,dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|\ln(\sec x + \tan x)| + C.$$

3) $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$= \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C.$$

4) $$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

5) $$\int \sec x\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$u = \sec x + \tan x$

$du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\,dx$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

6) $$\int \csc x\,dx = \int \csc x \cdot \left(\frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}\right) dx$$

$$= \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x}\, dx \qquad u = \csc x + \cot x$$

$$du = (-\csc x \cot x - \csc^2 x)\,dx$$

$$= \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= \boxed{-\ln|\csc x + \cot x| + C}$$

$$= \boxed{\ln|\csc x - \cot x| + C}$$

[Note that $-\ln|\csc x + \cot x| = \ln|\csc x + \cot x|^{-1}$

$$= \ln\left(\frac{1}{|\csc x + \cot x|}\right) = \ln\left(\frac{\csc x - \cot x}{\csc^2 x - \cot^2 x}\right)$$

ثم الضرب في $\frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$، وحيث أن $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$، نحصل على

$-\ln|\csc x + \cot x| = \ln|\csc x - \cot x|$]

7) $$\int_0^{\pi/6} \tan 2x\, dx = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u|\Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Substitute $u = 2x$,
$dx = du/2$,
$u(0) = 0$,
$u(\pi/6) = \pi/3$ ■

8) $$\int \frac{dx}{2\sqrt{x} + 2x} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} \qquad u = 1 + \sqrt{x}$$

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|1+\sqrt{x}| + C \qquad \square$$