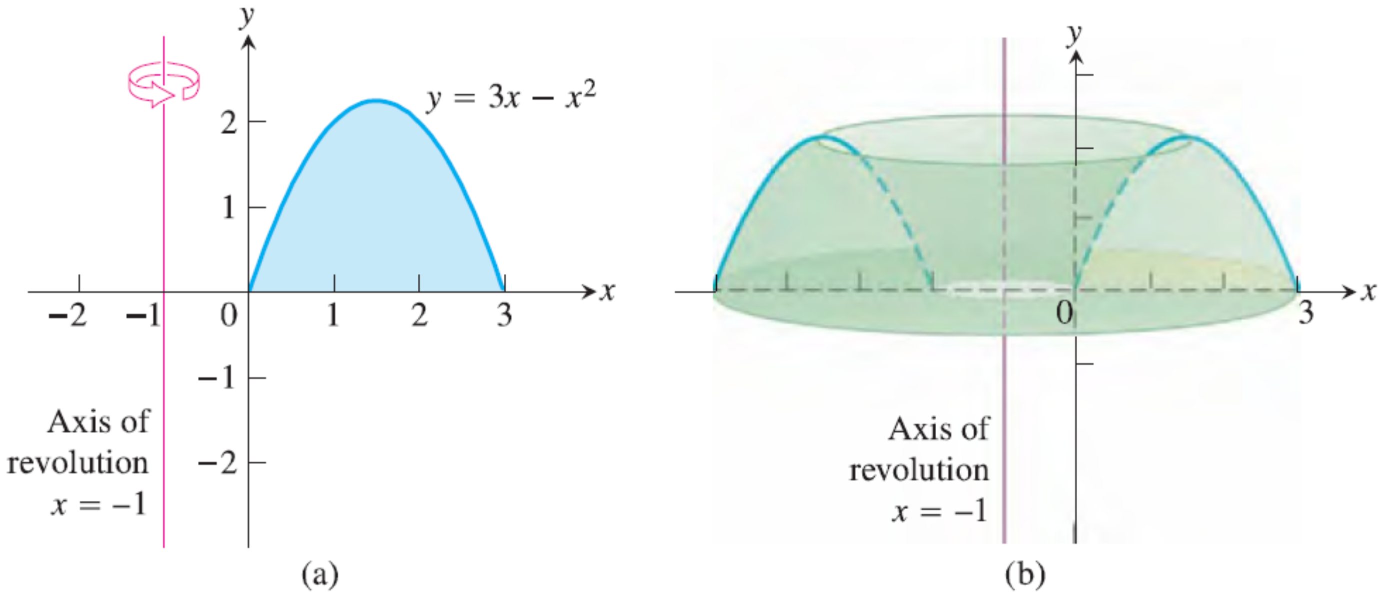
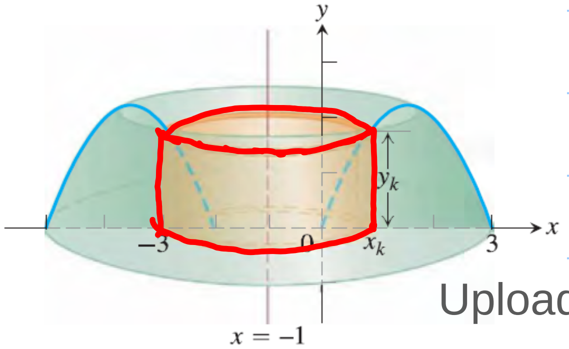
6.2 Volumes Using Cylindrical Shells

Slicing with Cylinders

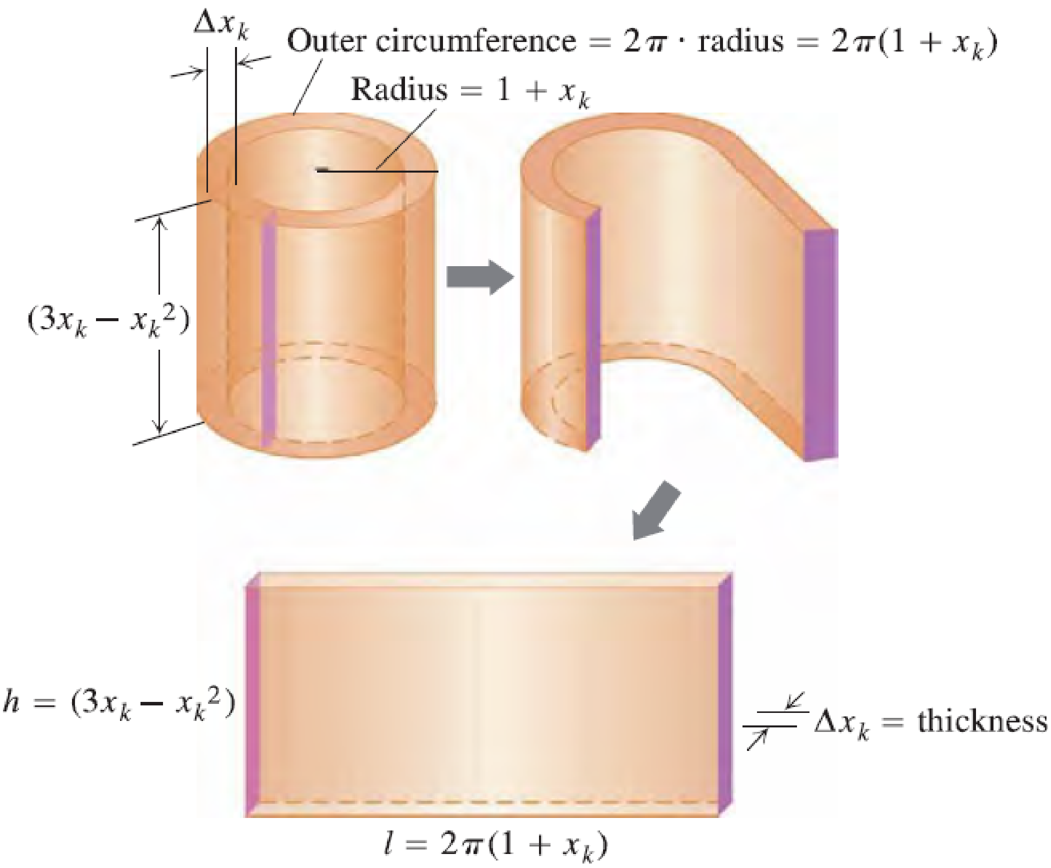
EXAMPLE 1 The region enclosed by the x-axis and the parabola $y = f(x) = 3x - x^2$ is revolved about the vertical line $x = -1$ to generate a solid (Figure 6.16). Find the volume of the solid.



إذا فكرنا بأخذ شريحة عرضية (Cross section) فإنه يلزمنا
أخذ خط متعامد على محور الدوران ليكون القطاع العرضي هو قرص أو حلقة
في هذا المثال الخط المتعامد على محور الدوران يبدو أكثر تعقيداً.
لذلك سنفكر في عمل شريحة إسطوانية (ليست عرضية) بأخذ
خط يوازي محور الدوران، ويحسب مساحة السطح وتكامل
على حركة الخط سينتج حجم الجسم الدوراني بطريقة جديدة تسمى
طريقة الشرائح الإسطوانية. (انظر المثال 1)



الرسم التوضيحي التالي يبين حجم الشريحة الإسطوانية



The Shell Method (Cylindrical formula)

Shell Formula for Revolution About a Vertical Line

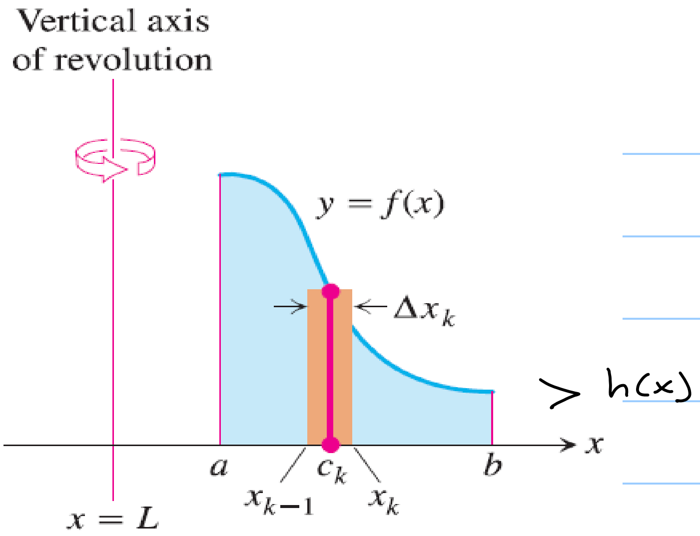
The volume of the solid generated by revolving the region between the x-axis and the graph of a continuous function $y = f(x) \geq 0$, $L \leq a \leq x \leq b$, about a vertical line $x = L$ is

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{shell}\\ \text{radius}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{shell}\\ \text{height}\end{pmatrix} dx. = \int_a^b 2\pi\, r(x)\, h(x)\, dx$$

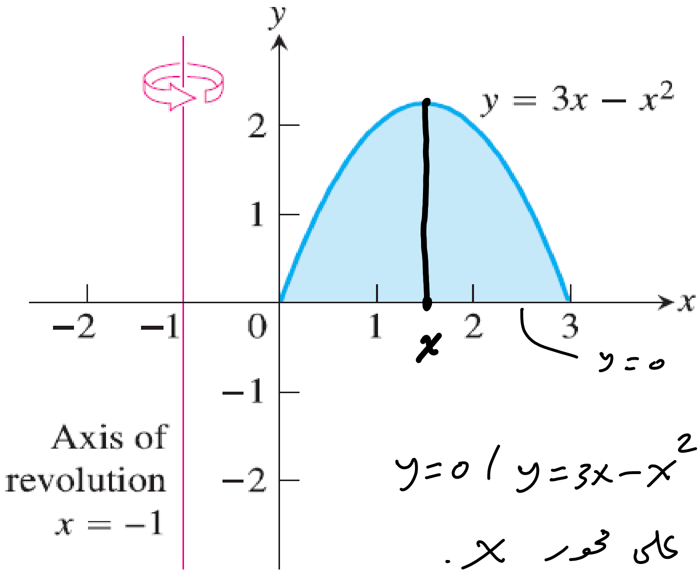
لإيجاد الحجم نرسم خط موازي لمحور الدوران داخل منطقة الدوران ونحدد مجال حركته (ولدينا :

① shell radius (نصف قطر الشريحة) :- المسافة بين الخط الموازي لمحور الدوران وبين محور الدوران

② shell height (ارتفاع الشريحة) :- طول الخط الموازي لمحور الدوران .



إذا كان محور الدوران $y = L$ موازياً لمحور x / نرسم خط موازي لمحور x داخل منطقة الدوران وتحول المعادلات بدلالة y $(x = g(y))$ ويكون التكامل بدلالة y .



(بالعودة للمثال السابق)

- الخط يوازي محور y و المعادلات هي $y=3x-x^2$ / $y=0$
- حركة الخط داخل المنطقة من 0 إلى 3 على محور x.

نصف قطر و ارتفاع الشريحة هما

$r(x) =$ المسافة بين الخط و محور الدوران $= x-(-1) = x+1$

$h(x) =$ طول الخط المرسوم $= (3x - x^2) - 0 = 3x - x^2$

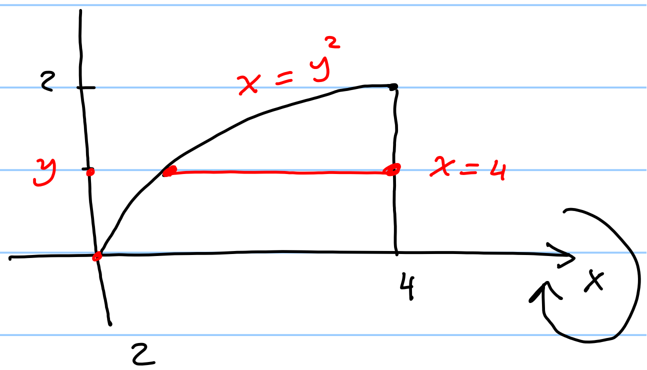
$$V = 2\pi \int_0^3 r(x)\,h(x)\,dx = 2\pi \int_0^3 (x+1)(3x-x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 2x^2 + 3x - x^3\,dx = \frac{45}{2}\pi .$$

2) **(EXAMPLE 4)** The region between the curve $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 4$, and the x-axis is revolved about the x-axis to generate a solid. Find its volume.

sol: (تم حل السؤال بطريقة الشرائح أو الأقراص وكان الناتج 8π)

By using Cylindrical shell:



Shell radius $r(y) = y$

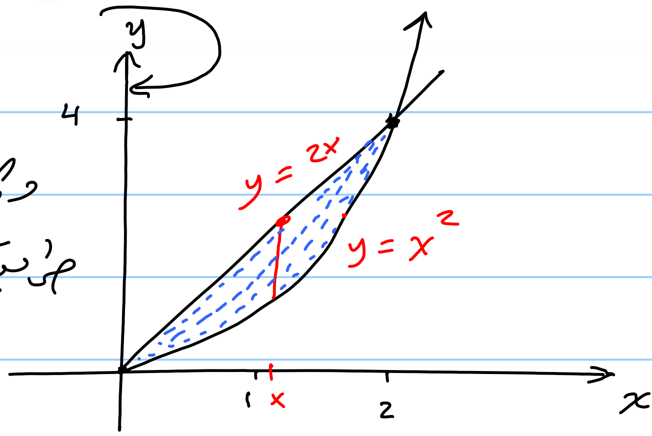
shell hight $h(y) = 4 - y^2$

$$V = 2\pi \int_0^2 y\,(4-y^2)\,dy = 2\pi \int_0^2 4y - y^3\,dy$$

$$= 2\pi \left(2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = \boxed{8\pi}.$$

3) **(EXAMPLE 10)** The region bounded by the parabola $y = x^2$ and the line $y = 2x$ in the first quadrant is revolved about the y-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

sol: تم حل السؤال باستخدام طريقة الحلقات وكان الناتج $\frac{8}{3}\pi$. سنقوم بحله باستخدام طريقة الشرائح الاسطوانية .



Cylindrical shell:

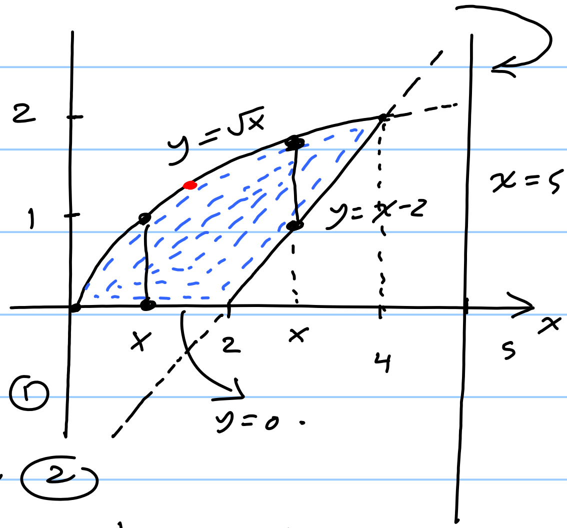
- ارسم خط يوازي محور الدوران داخل المنطقة ونكتب المعادلات بالطريقة المناسبة .
(هنا نكتب المعادلات $y = 2x$, $y = x^2$)
- حركة الخط من 0 إلى 2 على محور x .
- $r(x) = x$, $h(x) = 2x - x^2$.

$$\therefore V = 2\pi \int_0^2 x\,(2x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^2 2x^2 - x^3\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}\pi}.$$

4) Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y=\sqrt{x}$, x-axis, and $y=x-2$,

(i) about $x=5$. (ii) about $y=-1$.



sol: (i) تم حل السؤال بفرعيه في الفصل السابق (راجع sec 6.1)

سنقوم بحله باستخدام طريقة الشرائح الإسطوانية.

① ارسم منطقة الدوران وحدد محور الدوران

② ارسم خط موازي لمحور الدوران داخل منطقة الدوران وحدد مجال حركته.

③ اكتب المعادلات بالطريقة المناسبة وهي هنا $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=x-2$

④ حدد نصف قطر وارتفاع الشريحة الإسطوانية

$$r(x) = 5-x$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-0, & \text{if } 0 \le x \le 2. \\ \sqrt{x}-x+2, & \text{if } 2 < x \le 4. \end{cases}$$

$$\therefore V = 2\pi \int_0^4 r(x)\,h(x)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\int_0^2 (5-x)\sqrt{x}\,dx + \int_2^4 (5-x)(\sqrt{x}-x+2)\,dx \right] = \boxed{\frac{316}{15}\pi}$$

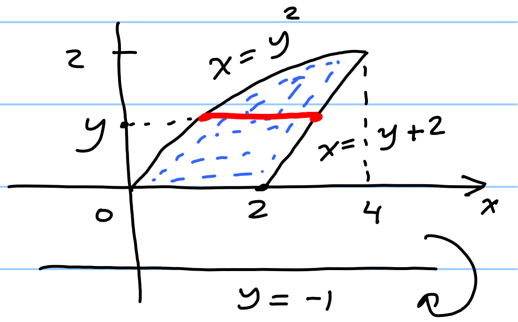
قارنه بالحل في sec 6.1 ستجد أن الحل في هذه الفرعية باستخدام طريقة washer هو أسهل منه باستخدام طريقة الشرائح الإسطوانية.

لأن الخط المتعامد على محور الدوران لا يؤدي لتقسيم المنطقة.

ii) بنفس الخطوات في (i) مع كون محور الدوران $y=-1$

$r(y) = y-(-1) = y+1$

$h(y) = (y+2) - y^2$



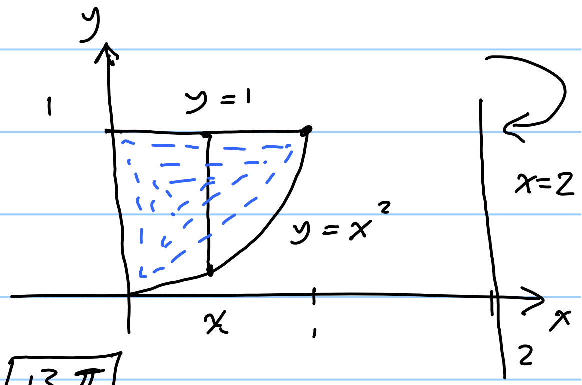
$$V = 2\pi \int_0^2 (y+1)(y+2-y^2)\,dy$$

$$= \boxed{12\pi}$$

قارن هنا الحل بالحل في sec 6.1 الذي يستخدم طريقة الشرائح سنجد أن الحل هنا أسهل / والسبب أن الخط الموازي لمحور الدوران لا يؤدي لتجزئة المنطقة.

الخلاصة: مقارنة طريقتي الشرائح الاسطوانية والحلقات مرجعها السهولة تعتمد على الخط المرسوم داخل المنطقة. فإذا كان الخط العمودي على محور الدوران لا يؤدي لتجزئة التكامل بينما الموازي يجزئ التكامل تكون طريقة الحلقات أسهل، ويكون العكس بالعكس.

5) The region in the first quadrant bounded by the curves $y=x^2$, y-axis and $y=1$ is revolved about $x=2$ to generate a solid. Find its volume using the cylindrical shell and the washer method.



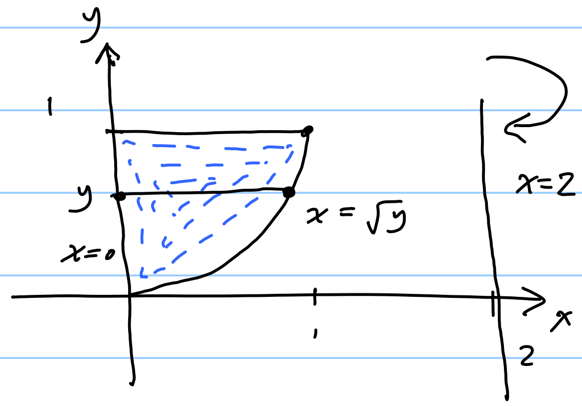
sol: Cylindrical shell:

$r(x) = 2-x$, $h(x) = 1-x^2$,

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(1-x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 2-2x^2-x+x^3\,dx = \boxed{\frac{13\pi}{6}}$$

Washer Method:



$r(y) = 2 - \sqrt{y}$.

$R(y) = 2 - 0$

$$V = \pi \int_0^1 2^2 - (2-\sqrt{y})^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 4 - 4 + 4\sqrt{y} - y \, dy = \pi \int_0^1 4\sqrt{y} - y \, dy$$

$$= \pi \left(4 \tfrac{2}{3} y^{3/2} - \tfrac{y^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\tfrac{13}{6}\pi} .$$

Exercise: Read Example 1 and 2 in sec 6.2 in book.