Ch7 Transcendental funs

Note Title ٢٣/٠٣/١٤

7.1 Inverse funs and their Derivatives

One-to-one funs

DEFINITION A function $f(x)$ is **one-to-one** on a domain D if $f(x_1) \neq f(x_2)$ whenever $x_1 \neq x_2$ in D.

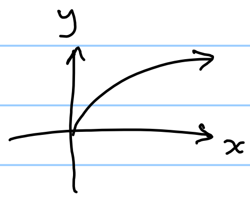
or equivalently, f is 1-1 whenever,

$$\text{“ } f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ ”}$$

Example: 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

is 1-1, since whenever $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.



2) $f(x) = x^2$ is not 1-1 on $\mathbb{R}$, since

$2 \neq -2$ and $f(-2) = 4 = f(2)$

3) $f(x) = x^2$ is 1-1 on $[1,4]$

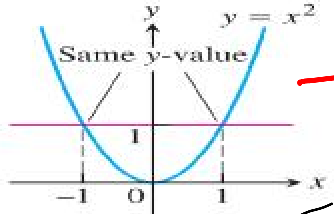
pf: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$

$|x_1| = |x_2| \Longrightarrow x_1 = x_2$ since $x_1, x_2 > 0$

The Horizontal Line Test for One-to-One Functions

A function $y = f(x)$ is one-to-one if and only if its graph intersects each horizontal line at most once.

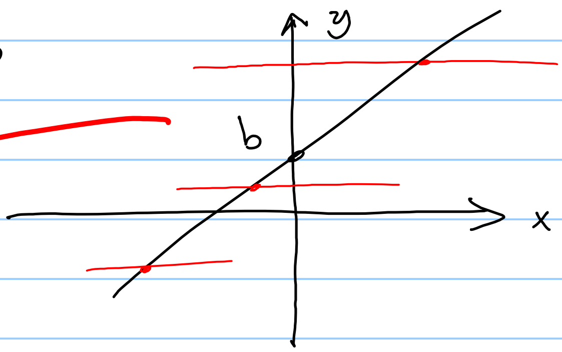
1) $y = x^2$,



is not 1 − 1

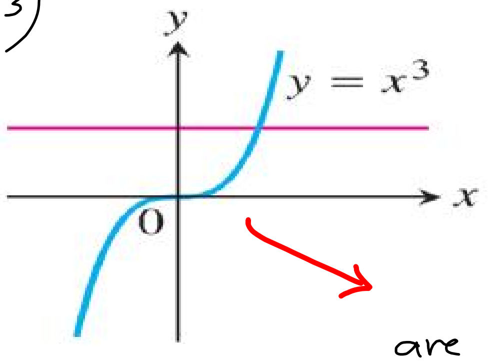
إذا قطع أي خط أفقي الدالة في أكثر من نقطة فإن هذا يعني أنه هناك عدة نقاط مختلفة صورتها متساوية وبالتالي فإن الدالة ليست 1-1 ،

2) $y = mx + b$, $m \neq 0$

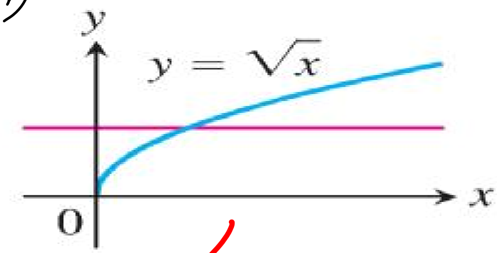


is 1 − 1

3)

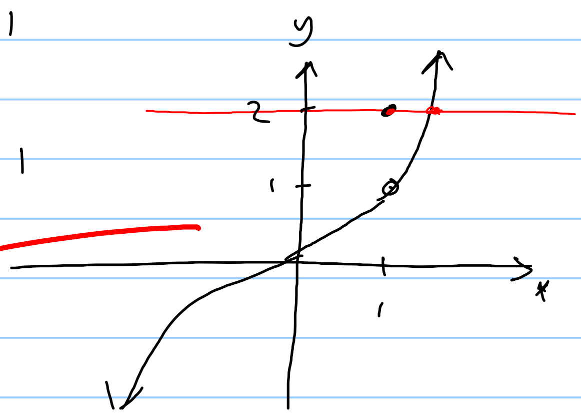


4)



are 1 − 1

4) $f(x) = \begin{cases} x^3 , & x \neq 1 \\ 2 , & x = 1 \end{cases}$



is not 1 − 1

Remark: ① If $f(x)$ is $\nearrow$ or $\searrow$ on $[a,b]$ then $f(x)$ is 1–1 on $[a,b]$

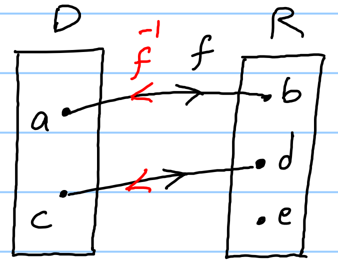
__PF:__ Suppose f is $\nearrow$, suppose $x_1 \neq x_2$, WLOG, suppose $x_1 < x_2$

$$\Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

2) funs that are neither $\nearrow$ nor $\searrow$ may be still 1–1

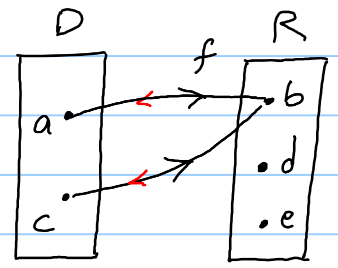
Inverses of funs

(i)



1–1 fun

(ii)



not 1–1 fun

$$\boxed{f(a) = b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a}$$

لاحظ أنه في الدوال ١-١ يمكن عكس اتجاه الدالة لنحصل على دالة أخرى تسمى دالة عكسية مجالها هو مدى الدالة الأصلية ، بينما في الدوال التي تكون ليست ١-١ فإنه بعكس اتجاه الدالة لا نحصل على دالة لأن إحدى النقاط ستكون مرتبطة بأكثر من نقطة . [في الرسمة (ii) فإنه بعكس اتجاه الدالة تكون b ارتبطت بـ a / c]

DEFINITION Suppose that f is a one-to-one function on a domain D with range R. The **inverse function** f^{-1} is defined by

$$f^{-1}(b) = a \text{ if } f(a) = b.$$

The domain of f^{-1} is $\boxed{R}$ and the range of f^{-1} is $\boxed{D}$.

range of f   domain of f.

Remarks: 1) If f is 1-1, then the following hold:

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{and} \quad f^{-1} \circ f(x) = x.$$

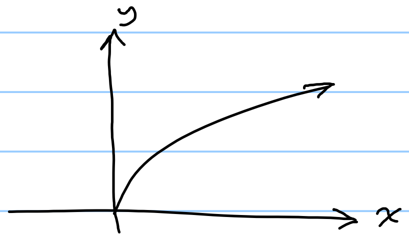
2) The symbol f^{-1} does not mean $\frac{1}{f(x)}$.

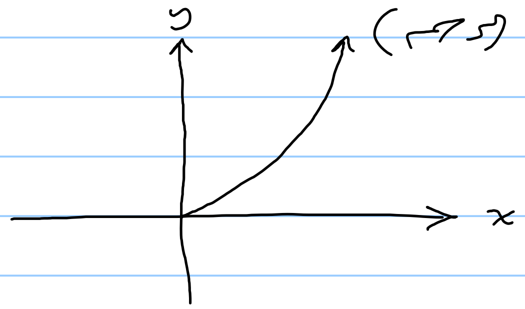
Example: 1) We know that $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ is 1-1 fun, so it has an inverse fun. If $g(x) = x^2$, $x \geq 0$, then consider

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad (x \geq 0)$$

and
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Therefore $f^{-1}(x) = g(x) = x^2$, $x \geq 0$.





(انظر الرسم)

EXAMPLE 2 Suppose a one-to-one function $y = f(x)$ is given by a table of values

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	4.5	7	10.5	15	20.5	27	34.5

A table for the values of $x = f^{-1}(y)$ can then be obtained by simply interchanging the values in the columns of the table for f:

y	3	4.5	7	10.5	15	20.5	27	34.5
$f^{-1}(y)$	1	2	3	4	5	6	7	8

■

Note that $f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in R(f)$ and $f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in D(f)$

For Example:

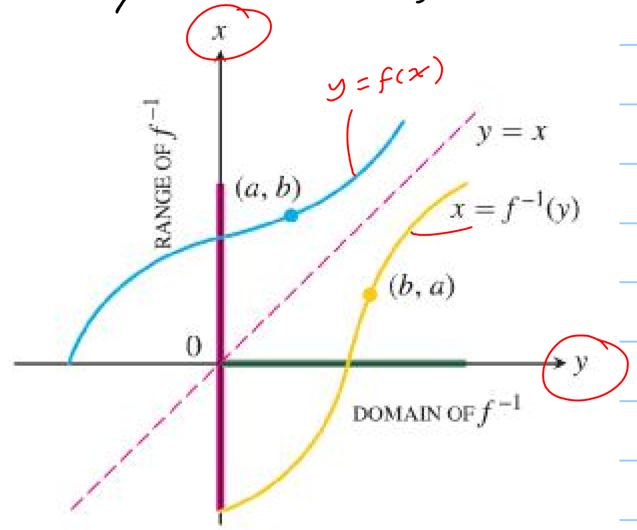
$$f \circ f^{-1}(10.5) = f(f^{-1}(10.5)) = f(4) = 10.5$$

and

$$f^{-1} \circ f(7) = f^{-1}(f(7)) = f^{-1}(27) = 7.$$

Finding Inverse:

هندسياً: إذا كان لدينا رسمة لدالة $y=f(x)$ ، وإذا كانت الدالة 1-1 فإنه يمكن الحصول على رسمة الدالة العكسية $y=f^{-1}(x)$ عند طريق ابدال المحاور x بـ y ، وهو ما يمكن تطبيقه بعكس الرسمة حول الخط المستقيم $y=x$ ، في هذه الحالة نحصل على رسمة f^{-1} ولا نحصل على قانونها (انظر الرسمة)



جبرياً: العملية الهندسية السابقة يمكن تطبيقها جبرياً للحصول على قانون f^{-1} بالخطوتين التاليتين:

أ) حل المتغير x بـ y وذلك بكتابة العلاقة $y=f(x)$ بالصورة $x=g(y)$

ب) ابدال x بـ y للحصول على الدالة العكسية $y=g(x)=f^{-1}(x)$

Examples: Find the inverse of the following funs

1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$

sol:

$y=\sqrt{x} \Rightarrow y^2=(\sqrt{x})^2=x \Rightarrow$ هنا نبدل x بـ y لنحصل على الدالة العكسية

$y=f^{-1}(x)=x^2$

2) $f(x)=\frac{x}{4}+3$

sol: $y=\frac{x}{4}+3 \Longrightarrow \frac{x}{4}=y-3 \Rightarrow x=4y-12$

$\Longrightarrow y=f^{-1}(x)=4x-12$

3) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [-4, -3]$.

sol: Firstly, note that $f(x) = x^2+1$ is not 1-1 in general but it is 1-1 on the restricted domain $[-4,-3]$.

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow |x| = \sqrt{y-1} \quad (x<0)$$

$$\Rightarrow -x = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = -\sqrt{y-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}.$$

Derivatives of Inverses of Differentiable funs

THEOREM 1—The Derivative Rule for Inverses If f has an interval I as domain and $f'(x)$ exists and is never zero on I, then f^{-1} is differentiable at every point in its domain (the range of f). The value of $(f^{-1})'$ at a point b in the domain of f^{-1} is the reciprocal of the value of f' at the point $a = f^{-1}(b)$:

مشتقة الدالة العكسية عند b

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \tag{1}$$

مطلوب المشتقة للدالة f عند $a = f^{-1}(b)$.

or

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

بشكل عام ولكل x أيا ما

EXAMPLE 5 a) The function $f(x) = x^2, x \geq 0$ and its inverse $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ have derivatives $f'(x) = 2x$ and $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Verify the above Thrm.

sol:

From the theorem above, we have that

$$\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b) Find $\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=4}$.

sol: مباشرة: $\dfrac{df^{-1}}{dx}\Big|_{x=4} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

باستخدام النظرية: $4 = f(a) = a^2 \Longrightarrow a = 2 \qquad (a>0)$

$$\text{so} \quad \frac{df^{-1}}{dx}\Big|_{x=4} = \frac{1}{\frac{df}{dx}\Big|_{x=2}} = \frac{1}{2x}\Big|_{x=2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Examples: 1) Find $\dfrac{df^{-1}}{dx}\Big|_{x=6}$ if $f(x) = x^3 - 2$.

sol: لاحظ هنا أننا نستطيع إيجاد f^{-1} ومشتقتها مباشرة والتعويض بـ $x=6$.
سنقوم بإيجاد الحل باستخدام النظرية السابقة.

Firstly, $6 = f(a) = a^3 - 2 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2.$

and $\dfrac{df}{dx} = 3x^2.$

$$\text{so} \quad \frac{df^{-1}}{dx}\Big|_{x=6} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)\Big|_{x=2}} = \frac{1}{3x^2}\Big|_{x=2} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

2) Let $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \geq 2$. Find the value of df^{-1}/dx at the point $x = -1 = f(3)$.

sol: لاحظ هنا أننا نستطيع إثبات أنه f هي 1-1 [يكفيه إثبات ذلك
بإثبات أنه الدالة متزايدة على الفترة $[2,\infty)$ كالتالي: $f' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

y': $+ + \quad 0 \quad - - - \quad 2 \quad + + + +$

واضح أنه الدالة متزايدة على الفترة $[2,\infty)$ وبالتالي فإنها تكون 1-1 وبالتالي
فإنه معكوس الدالة موجود. [

ورغم ذلك لا نستطيع حل x بـ y وبالتالي لا نستطيع إيجاد قانون لـ f^{-1} وعليه
فإننا لا نستطيع إيجاد المشتقة بشكل مباشر.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$, so

$$\left(f^{-1}\right)'\Big|_{x=-1} = \frac{1}{f'}\Big|_{x=3} = \frac{1}{3x^2 - 6x}\Big|_{x=3} = \boxed{\frac{1}{9}}$$