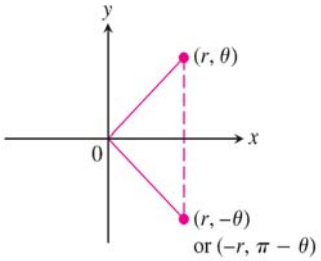
11.4 Graphing in Polar Coordinates

Note Title ٢٣/٠٦/١٤

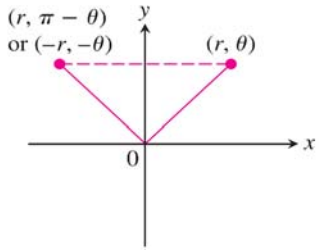
Symmetry:

Symmetry Tests for Polar Graphs

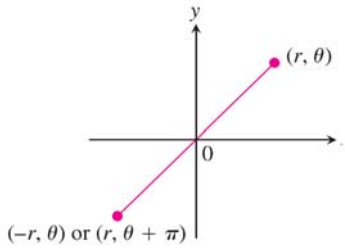
1. *Symmetry about the x-axis:* If the point (r, θ) lies on the graph, then the point $(r, -\theta)$ or $(-r, \pi - \theta)$ lies on the graph (Figure 11.26a).
2. *Symmetry about the y-axis:* If the point (r, θ) lies on the graph, then the point $(r, \pi - \theta)$ or $(-r, -\theta)$ lies on the graph (Figure 11.26b).
3. *Symmetry about the origin:* If the point (r, θ) lies on the graph, then the point $(-r, \theta)$ or $(r, \theta + \pi)$ lies on the graph (Figure 11.26c).



(a) About the x-axis



(b) About the y-axis



(c) About the origin

ملحوظة: في أي منحنى / إذا تحقق تماثلان من أي نوع فإنه التماثل الثالث يكون بالتأكيد متحقق / وعليه فإنه لا يمكن أن يكون لمنحنى تماثلان فقط . بقية أخرى المنحنى يحتمل حالة من الحالات التالية :

١- ليس له أي نوع من التماثلات
٢- له تماثل واحد فقط .
٣- له ثلاث تماثلات .

والتماثلات عادة تساعد من عملية رسم المنحنيات .

Slope:

إذا كان لدينا منحنى معطى بالمعادلات القطبية / $r = f(\theta)$ فإنه ميل المنحنى لا زال يعطى بالعلاقة / $\frac{dy}{dx}$ / ولكن / $\frac{dy}{dx} \neq f'(\theta)$

ولإيجاد $\frac{dy}{dx}$ تذكر أنه

$$x = r\cos\theta \quad \text{and} \quad y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta + \cos\theta \cdot \frac{dr}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$

$$\text{and} \quad \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \sin\theta \cdot \frac{dr}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

STUDENTS-HUB.com

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$$ (بشرط المقام لا يساوي صفراً)

- If the graph of $r = f(\theta)$ passes through the origin at the angle $\theta = \theta_0$, then the slope of the curve at $(0, \theta_0)$ is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\theta_0}{r'\cos\theta_0} = \tan\theta_0$$

Example: Find the slope of the curve

$$r = 1 + 2\cos\theta \quad \text{at} \quad \theta = -\pi/2$$

Sol: $r' = \frac{dr}{d\theta} = -2\sin\theta$

Now $r'(-\pi/2) = -2 \cdot -1 = 2$

$r(\pi/2) = 1 + 2\cos(-\pi/2) = 1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=-\pi/2} = \left.\frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}\right|_{\theta=-\pi/2}$$

$$= \frac{2 \cdot -1 + 1 * 0}{2 * 0 - 1 * -1} = \frac{-2}{1} = \boxed{-2}$$

Examples: Sketch the graph of the following:

1) $r = 1 - \cos\theta$ (Cardioid)

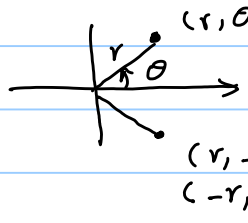
Sol: الخطوة الأولى في رسم المنحنيات المعرفة بالإحداثيات القطبية ابدأ بفحص التماثلات لأنها تساعد في عملية الرسم.

STUDENTS-HUB.com

فحص التماثلات

أحد كتابة المعادلة بالصورة $F(r,\theta)=0$ وبالتالي

$(r,\theta) \in Graph \Longrightarrow F(r,\theta) = r+\cos\theta - 1 = 0$ --- (*)



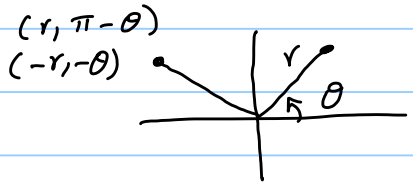
about x: Is $(r,-\theta) \in G$??

Consider $F(r,-\theta) = r+\cos(-\theta)-1$

$= r+\cos\theta - 1 \overset{(*)}{=} 0$

$\Rightarrow (r,-\theta) \in G \Rightarrow \exists$ a symmetric about x-axis

about y: Is $(r,\pi-\theta) \in G$??



Consider $F(r,\pi-\theta) = r+\cos(\pi-\theta)-1$

$= r+\cos\pi\cos\theta+\sin\pi\sin\theta-1$

$= r-\cos\theta-1 \overset{(*)}{\neq} 0$

النقطة لا تقع على المنحنى بشكل مباشر / هذا لا يعني أنها لا تقع على المنحنى فقد تقع على المنحنى بأشكال أخرى.

Is $(-r,-\theta) \in G$??

Consider $F(-r,-\theta) = -r+\cos(-\theta)-1 = -r+\cos\theta-1 \overset{(*)}{\neq} 0$

$\Rightarrow \not\exists$ symmetric about y-axis.

رأينا وجود تماثلات يؤدي لوجود التماثل الثالث هذا يعني بالضرورة عدم وجود تماثل حول نقطة الأصل

$\Rightarrow \not\exists$ symmetric about origin

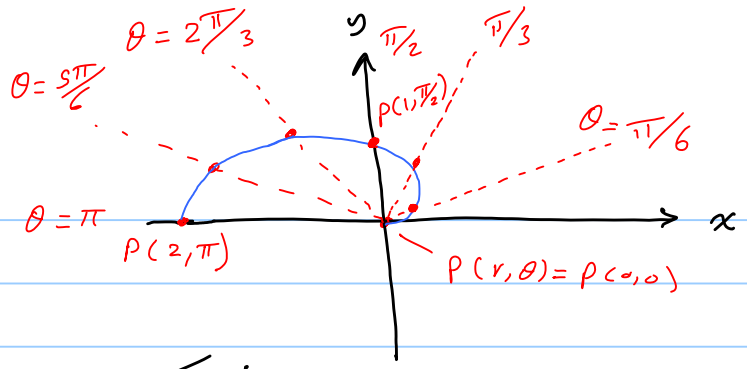
الخطوة الثانية في الرسم هي بعمل جدول لقيم r,θ مع الأخذ بعين الاعتبار ما إذا كانت r دورية في θ بالإضافة للتماثلات.

في هذا المثال / بما أن قيمة r تتكرر كل فترة 2π ولوجود تماثل حول x يكفينا أخذ θ من 0 إلى π.

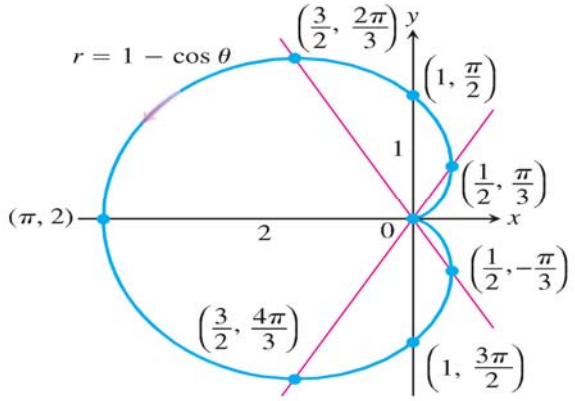
θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
r	0	0.134	0.5	1	1.5	1.866	2

الخطوة الثالثة في الرسم هو وضع هذه النقاط $p(r,\theta)$ على المستوى xy ثم استخدام التماثل كما يلي:

STUDENTS-HUB.com



مانحم رسمه يمثل نصف الوردة والنصف الآخر يمكن الحصول عليه بالتماثل حول x
بعكس الوردة للحصول على



ملحوظة: شكل عام يأخذ المعادلة (رسم القلب) Cardioid

العامة

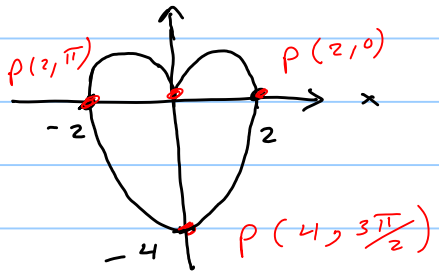
$$r = a + a\cos\theta \quad \text{or} \quad r = a + a\sin\theta$$

في المعادلة $r = a + a\cos\theta$ يكون محور رسم القلب هو محور x والتماثل يكون حول
أما الرأس $2a$ / فيكون حسب إشارة cos. أما على الشق الموجب لمحور x
وإما على الشق السالب لمحور x /

أما المعادلة $r = a + a\sin\theta$ فيكون التماثل حول y ويكون المحور هو y /
ويكون الرأس $2a$ وإما على الشق الموجب أو السالب للمحور حسب إشارة sin.

مثلاً ① $r = 2 - 2\sin\theta$ y (Cardioid)

الرأس على الشق السالب لمحور y لأن 4 -

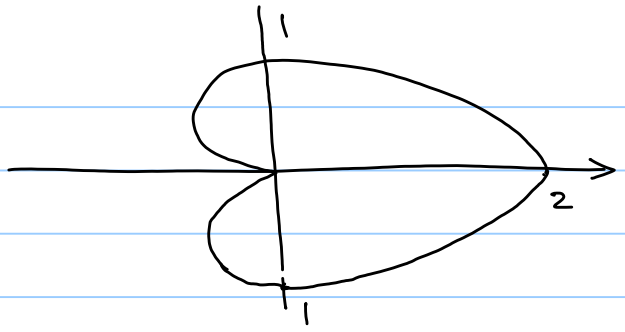


موجب

② $r = -1 + \cos\theta =$

محوره محور x ورأسه على الشق الموجب لمحور x Cardioid

STUDENTS-HUB.com



وهكذا ١

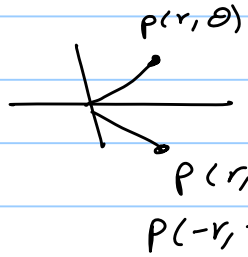
2) $r = 1 + 2\sin\theta$

نفحص التناظر أولاً Set $F(r,\theta) = r - 2\sin\theta - 1$

$\Rightarrow (r,\theta) \in G$ iff

$$F(r,\theta) = r - 2\sin\theta - 1 = 0 \quad \text{---} \quad (*)$$

about x-axis: Is $p(r,-\theta) \in G$??

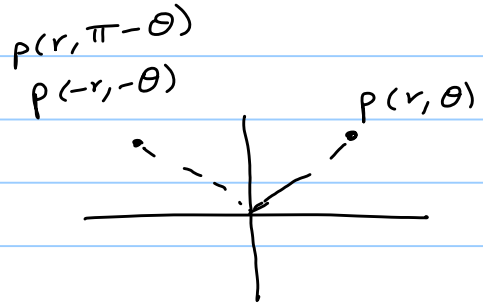


$$F(r,-\theta) = r - 2\sin(-\theta) - 1$$
$$= r + 2\sin\theta - 1 \overset{(*)}{\neq} 0$$

Is $p(-r,\pi-\theta) \in G$??

$$F(-r,\pi-\theta) = -r - 2\sin(\pi-\theta) - 1$$
$$= -r - 2(\sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta) - 1$$
$$= -r - 2\sin\theta - 1 \overset{(*)}{\neq} 0$$

$\nexists$ symmetric about x-axis.



about y-axis: Is $p(r,\pi-\theta) \in G$??

$$F(r,\pi-\theta) = r - 2\sin(\pi-\theta) - 1$$
$$= r - 2\sin\theta - 1 \overset{(*)}{=} 0$$

$\Rightarrow \exists$ symmetric about y-axis.

لابد وجود تماثلاته يؤدي لوجود الثالث، بأنه لا يمكن أن يكون هناك تماثل حول الأصل.

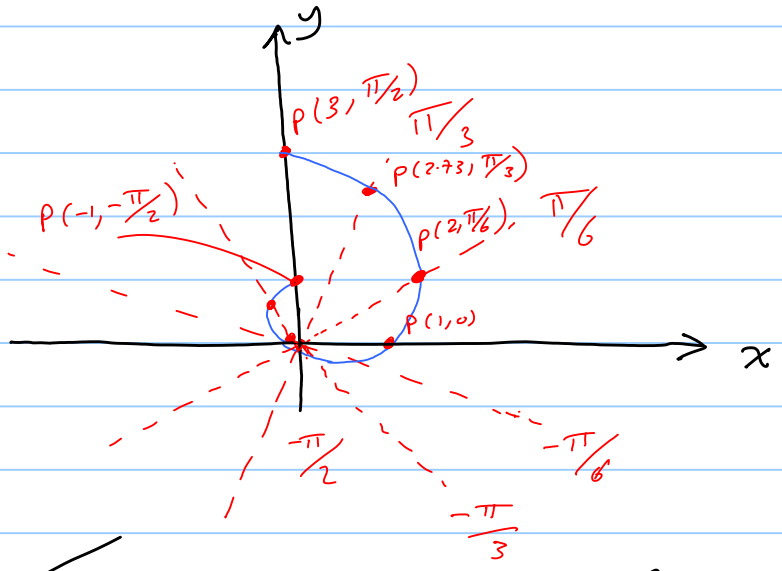
لعمل جدول لـ (r,θ) نلاحظ أن الدالة تتكرر كل 2π ولوجود تماثل حول y فإننا لا نحتاج لكل قيم الدورة وإنما يكفينا أن نأخذ نصف الدورة لعمل نصف دائرة و النصف الآخر نوجده بالتماثل (ويمكن إيجاد الدالة بأقل)

رأينا التماثل حول y، فإنه يكفينا أن نرسم في الربع الأول والرابع ثم نعكس لعمل تماثل حول y

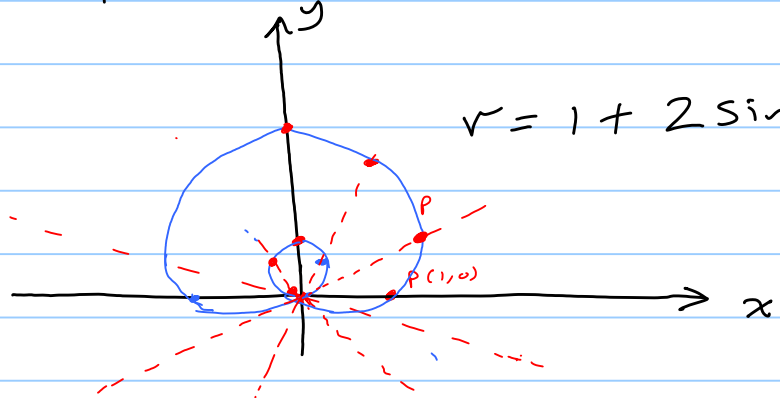
STUDENTS-HUB.com

لذا سنختار قيم θ الصغيرة من $-\pi/2$ حتى $\pi/2$.

θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	-1	-0.73	0	1	2	2.73	3



ما تم رسمه يمثل نصف الحركة ، ولرسم الكارديو يجب استكمال الدائرة حول y
(أو على بقية قيم θ)



$$r = 1 + 2\sin\theta .$$

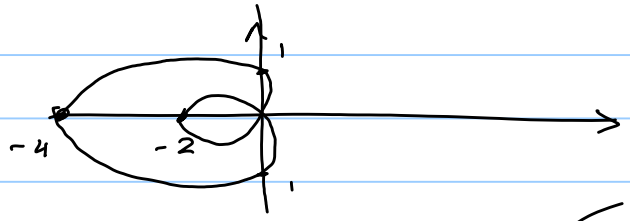
المنحنى السابق رسمه Limacon with inner loop وتقع في سلوك العلاقة الشبيهة بعلاقة ، أي الكلب - Cardiod - راجع العلاقة أعلاه ، ولذلك

$$r = a + b\sin\theta \quad \text{or} \quad r = a + b\cos\theta$$

حيث $1 < |\frac{a}{b}| < 2$ شكل شائعة للسابق .

مثال: المعامل السالب ← الرسم على المحور السالب ← محور التماثل هو x

$$r = 1 - 3\cos\theta \quad \text{has graph}$$



تذكير: إذا رسم الشكل للمنحنى $r = a + b\cos\theta$ أو $r = a + b\sin\theta$ كانت $|\frac{a}{b}| > 2$

STUDENTS-HUB.com

3) $r^2 = 4\cos 2\theta$

Sol: $F(r,\theta) = r^2 - 4\cos 2\theta$

$(r,\theta) \in G \Longrightarrow F(r,\theta) = r^2 - 4\cos 2\theta = 0$ ---- (*)

نفحص التناظر

حول x: Is $p(r,-\theta) \in G$??

Consider $F(r,-\theta) = r^2 - 4\cos(-2\theta) = r^2 - 4\cos 2\theta \overset{(*)}{=} 0$ ✓

حول y: Is $p(-r,-\theta) \in G$??

Consider $F(-r,-\theta) = (-r)^2 - 4\cos(-2\theta) = r^2 - 4\cos 2\theta = 0$ ✓

so ∃ symmetric about x-axis and about y-axis,

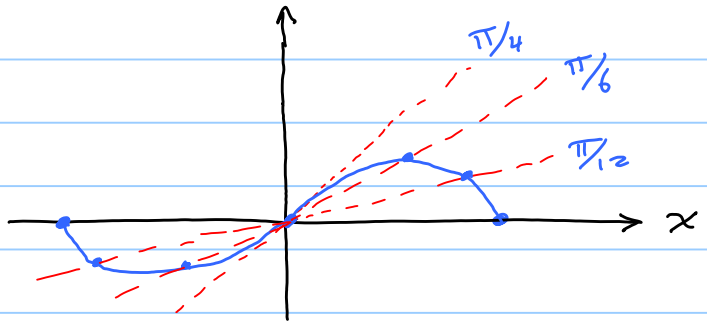
so ∃ symmetric about origin.

قبل عمل جدول لقيم r,θ لاحظ من المعادلة أنه $r^2 = 4\cos 2\theta$ يجب أن تكون سالبة وعليه فإنه 2θ يجب أنه تكون من الربع الأول أو الرابع فقط وإلا فإنه r^2 تساوي رقم سالب.

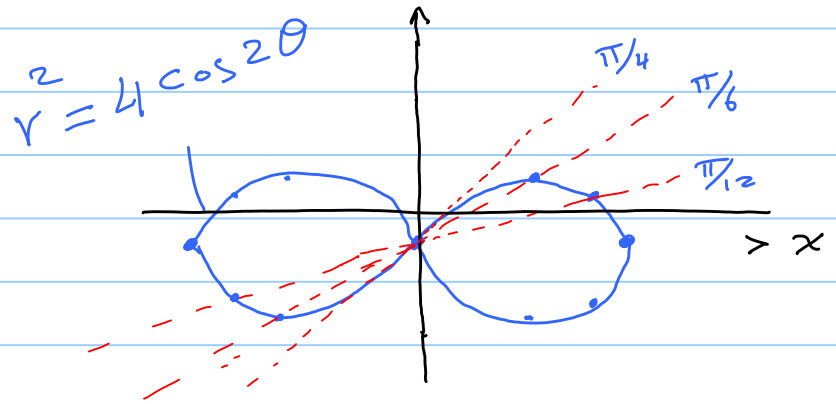
لوجود التماثلات السابقة نأخذ 2θ من الربع الأول ونستخدم التماثلات

بمعنى $0 \le 2\theta \le \pi/2 \Longleftarrow 0 \le \theta \le \pi/4$

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$
$r = \mp\sqrt{4\cos 2\theta}$	∓ 2	∓ 1.86	∓ 1.414	0



وباستخدام التماثل حول x وحول y وحول الأصل نجد أن الرسمة المطلوبة هي



STUDENTS-HUB.com

4) $r^2 = 4\sin 2\theta$

$(r,\theta) \in G \Rightarrow F(r,\theta) = r^2 - 4\sin 2\theta = 0$ ---- (*).

نعوض بالمتباينات

about x: Is $p(r,-\theta) \in G$??

$$F(r,-\theta) = r^2 - 4\sin(-2\theta) = r^2 + 4\sin 2\theta \overset{(*)}{\neq} 0$$

$p(r,-\theta) = p(-r, \pi-\theta)$.

$$F(-r,\pi-\theta) = (-r)^2 - 4\sin(2\pi-2\theta) = r^2 - 4(\sin 2\pi\cos 2\theta - \cos 2\pi \sin 2\theta) = r^2 + 4\sin 2\theta \overset{(*)}{\neq} 0$$

$\therefore \not\exists$ symmetric about x-xis.

about origin: Is $(-r,\theta) \in G$??

$$F(-r,\theta) = (-r)^2 - 4\sin 2\theta = r^2 - 4\sin 2\theta \overset{(*)}{=} 0.$$

$\exists$ a symmetic about origin.

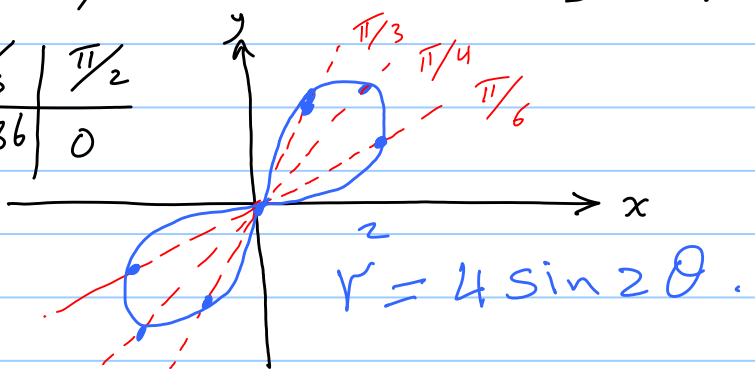
$\Rightarrow \not\exists$ symmetric about y-axis.

نأخذ المعادلة $r^2 = 4\sin 2\theta$ ونجد أن $\sin 2\theta$ يجب أن يكون موجباً أو صفراً حتى تكون r^2 موجبة، وهذا يحدث في الربع الأول والثاني فقط، وعليه

$0 \le 2\theta \le \pi \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi/2$

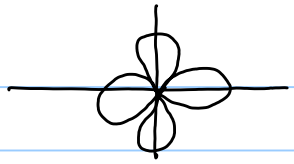
ثم نأخذ θ المناسبة في $\theta \in [0, \pi/2]$ ونستخدم المعادلة لإيجاد r.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r = \pm\sqrt{4\sin 2\theta}$	0	± 1.86	± 2	± 1.86	0

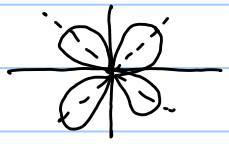


STUDENTS-HUB.com

5) $r = 4\cos 2\theta$

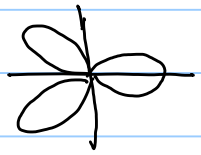


$r = 4\sin 2\theta$



$r = \sin 3\theta$

$r = \cos 3\theta$



حاول ايجاد التقاطعات لكل مثال (5) ورسم المنحنيات بشكل أوضح وأدق

STUDENTS-HUB.com