10.3 The Integral Test

Note Title ٢٣/٠٥/١٣

إذا كان لدينا متسلسلة $\sum a_n$ ذات حدود موجبة $a_n \geq 0$ لكل n فإن متتابعة المجاميع الجزئية تكون غير متناقصة لأنها تحقق العلاقة -

$$S_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$$

وبالتالي

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n < \cdots$$

وحسب النظريات، تكون تقاربية إذا وفقط إذا كانت محددة من أعلى، وهذا يبرهن النتيجة التالية:

Corollary of Theorem 6 A series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ of nonnegative terms converges if and only if its partial sums are bounded from above.

Example: The harmonic series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

is divergent series

PF: Group the terms of the series as follows:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots.$$

واضح أن هذا التجميع لحدود متتابعة المجاميع الجزئية يجعل المتتابعة غير محدودة من أعلى، وبالتالي ستكون تباعدية.

Test for Convergence

كما سبق نلاحظ أنه لأي متسلسلة، توجد متتابعة المجاميع الجزئية المرتبطة بها، ولكن تحدد ما إذا كانت المتسلسلة تباعدية أم تقاربية لابد ما يجب إيجاد قانون عام لمتتابعة المجاميع الجزئية أو إيجاد طريقة للتعامل معها لأخذ النهاية، ولكن إذا لم نستطع التعامل مع هذه النهاية، فإنه من المفيد معرفة ما إذا كانت المتسلسلة تقاربية أم تباعدية، فإذا كانت تباعدية فإن هذه تكون نهاية المطاف، أما إذا كانت تقاربية، فإنه يمكن التعامل معه وإيجاد تقريبات له.

سنستخدم بعض الاختبارات لفحص التقارب والتباعد.

THEOREM 9—The Integral Test Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive terms. Suppose that $a_n = f(n)$, where f is a continuous, positive, decreasing function of x for all $x \geq N$ (N a positive integer). Then the series $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ and the integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ both converge or both diverge.

الإختبار الثاني هو اختبار التكامل / ويستخدم عادة عندما تكون الدالة $f(x)$ سهلة التكامل .

Examples: Test the convergence of the following series:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

Sol: Let $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ for $x \geq 1$. So

a) $f(x)$ is continuous on $[1,\infty)$

b) Clearly $f(x)$ is positive on $[1,\infty)$.

c) $$f'(x) = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} - e^{\frac{1}{x}} \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1+2x) < 0 \text{ on}$$

$[1,\infty) \Longrightarrow f(x)$ is $\searrow$ on $[1,\infty)$

Consider $$\int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

$u = \frac{1}{x}$

$du = \frac{-1}{x^2}\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty} -\int_1^{\frac{1}{b}} e^u\,du$$

$x = 1 \longrightarrow u = 1$

$x = b \longrightarrow u = \frac{1}{b}$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^u \Big]_1^{\frac{1}{b}} = \lim_{b\to\infty} \left[e - e^{\frac{1}{b}}\right] = e - 1$$

So $\int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ is convergent.

$\Longrightarrow$ By integral test, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ is convergent.

ملحوظات : ١- في المثال السابق / تقارب المتسلسلة لا يساوي بالضرورة قيمة تقارب التكامل المعتل (١-٢).

٢- الشروط الثلاثة ! إذا لم تتحقق على $[1,\infty)$ وتحققت على $[N,\infty)$ يبقى الحل صحيحاً لأنه بإضافة أو إزالة عدد محدود من حدود المتسلسلة لا يؤثر على كونها تقاربية أم تباعدية .

2) (The p-series) نستخدم كنظرية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} , \quad p \text{ is a real constant}$$

sol: Let $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \in [1, \infty)$

a) $f(x)$ is cont. on $[1,\infty)$, (b) f is positive on $[1,\infty)$

c) $f'(x) = \frac{-p}{x^{1+p}} < 0 \quad \forall x \geq 1$, so f is $\searrow$ on $[1,\infty)$

Consider $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ is $\begin{cases} \text{conv.} & \text{if } p > 1 \\ \text{div.} & \text{if } p \leq 1 \end{cases}$

(improper p-integral)

so By integral test, we get that the p-series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ is } \begin{cases} \text{conv.} & \text{if } p > 1, \\ \text{div.} & \text{if } p \leq 1. \end{cases}$$

Illustrations:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverges (p-series, $p = \frac{1}{2} < 1$)

(ii) The harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges (p-series, $p=1$)

(iii) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges (p-series, $p = 2 > 1$)

لاحظ أنه اختبار الحد النوني في الأمثلة السابقة يفشل لأنه في كل الأمثلة $a_n \to 0$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

sol: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^1 \neq 0$, so the series div. by nth-term test.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^{-n^3}$

sol: Clearly the series is not geometric, not telescop., and $a_n \xrightarrow{L.R} 0$ so nth-term test fails.

Let $f(x) = x^2\, 2^{-x^3}$, $x \geq 1$.

a) $f(x)$ is cont. on $[1,\infty)$

b) $f(x)$ is positive on $[1,\infty)$

c) $f'(x) = x^2 \cdot 2^{-x^3} \cdot \ln 2 \cdot -3x^2 + 2x\, 2^{-x^3}$

$$= x\, 2^{-x^3}\left[2 - (3\ln 2)x^3\right] < 0 \qquad \forall x \geq 1$$

so f is $\searrow$ on $[1,\infty)$.

Consider
$$\int_1^{\infty} x^2\, 2^{-x^3}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^2\, 2^{-x^3}\, dx \qquad u = -x^3$$
$$du = -3x^2\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{-1}^{-b^3} \frac{-1}{3}\, 2^u\, du \qquad x=1 \longrightarrow u=-1$$
$$x = b \longrightarrow u = -b^3$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{3}\, \frac{1}{\ln 2}\, 2^u\right]_{-1}^{-b^3}$$

$$= \frac{-1}{3\ln 2} \lim_{b\to\infty}\left[2^{-b^3} - 2^{-1}\right] = \frac{1}{6\ln 2}$$

which is convergent, so by integral test,

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^{-n^3}$ converges.

ماحور

Examples: Discuss the Convergence of the following:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{n}+e^{-n}}$

<u>sol:</u> Let $f(x) = \dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{2e^{x}}{e^{2x}+1}$, $x \geq 1$

a) $f(x)$ is cont. on $[1,\infty)$,

b) $f(x)$ is positive on $[1,\infty)$, and

c) $f'(x) = \dfrac{(e^{2x}+1)\cdot 2e^{x} - 2e^{x}\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{-2e^{3x}+2e^{x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$$= \frac{-2e^{x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} < 0 \qquad \forall\ x \geq 1$$

so $f(x)$ is $\searrow$ fun on $[1,\infty)$.

Consider $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{2e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$

$u = e^{x}$

$du = e^{x}\,dx$

$x=1 \longrightarrow u=e$

$x=b \longrightarrow u=e^{b}$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_e^{e^{b}} \frac{2\,du}{u^2+1}$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2\tan^{-1}u \Big]_e^{e^{b}}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\tan^{-1}e^{b} - 2\tan^{-1}e\right) = \pi - 2\tan^{-1}e$$

which is conv. So by integral test, the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{n}+e^{-n}}$ is convergent series.

ملحوظة: لاحظ أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{n}+e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}(n)$$

وبالتالي كان يمكن ايجاد التكامل لـ $\operatorname{sech}(n)$ مباشرة والوصول لنفس النتيجة.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5n}\right)$

Sol: The original series is the sum of the two series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ is G.S. with $r=\frac{1}{5}$ so it is conv.

and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ which is a constant multiple of the divergent harmonic series, so by Corollary it is div.

Thus, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5n}\right)$ is the sum of convergent and divergent series, so it is $\boxed{\text{divergent}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+1}\right)$

Consider $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ is G.S. with $r=\frac{1}{5}$ so it is conv.

For the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+1}$

Let $f(x)=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{x^2+1}$ on $[1,\infty)$.

1) $f(x)$ is cont. on $[1,\infty)$

2) Clearly $e^{\tan^{-1}x}>0$ $\forall x\geq 1$ so $f(x)$ is positive for all $x\geq 1$

3) $f'(x) = \dfrac{(x^2+1) * e^{\tan^{-1}x} \cdot \frac{1}{x^2+1} - 2x\, e^{\tan^{-1}x}}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^{\tan^{-1}x}}{(x^2+1)^2}(1-2x) < 0$

$\forall x \geq 1 \Longrightarrow f(x)$ is $\searrow$ fun.

Consider $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\, dx$

$u = \tan^{-1}x$

$du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$

$x = 1 \longrightarrow u = \pi/4$

$x = b \longrightarrow u = \tan^{-1}b$

$= \displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_{\pi/4}^{\tan^{-1}b} e^u\, du$

$= \displaystyle\lim_{b\to\infty} e^u \Big]_{\pi/4}^{\tan^{-1}b} = \lim_{b\to\infty} \left(e^{\tan^{-1}b} - e^{\pi/4}\right) = e^{\pi/2} - e^{\pi/4}.$

which is convergent. So by integral test, the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+1}$ Converges. Hence, the original series

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n} + \frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+1}\right)$ $\boxed{\text{Converges}}$