Chapter 8: Techniques of Integration

Note Title ٢٣/٠٤/٠٩

مقدمة : مما سبق دراسته حتى الآن فإنه هناك تكاملات أساسية تستخدم كأساس لعملية التكامل وقد تم استنتاج هذه التكاملات من عملية الاشتقاق العكسية ، بالإضافة لعدد من الأفكار والوسائل الأساسية التي تم استخدامها في بعض التكاملات مثل التعويض البسيط ، إكمال المربع ، الضرب بصيغة من صيغ العدد 1 ، إضافة صيغة من صيغ الصفر ، توزيع حدود البسط على المقام وغيرها الكثير . (انظر التكاملات المرفقة) .

في هذا الفصل ، سنقوم بالتعرف على بعض الطرق للتعامل مع أنواع التكاملات المختلفة .

1. $\int k\,dx = kx + C$ (any number k)
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
12. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$
13. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
14. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
16. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
17. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ $(a > 0)$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ $(x > a > 0)$

8.1 Integration by Parts

تعتمد هذه الطريقة على التحويل تكامل صعب $\int u\,dv$ لا يمكن إيجاده بالطرق السابقة لتكامل أسهل $\int v\,du$ يمكن إيجاده بسهولة. و لإجراء هذا التحويل وإيجاد علاقة / لاحظ باستخدام قوانين الاشتقاق مايلي:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \quad (u \text{ and } v \text{ are fun's})$$

تكامل الطرفين

$$\Rightarrow \quad u \cdot v = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\therefore \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

We can write this formula in the form

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx$$

ملاحظة: عادة تستخدم هذه الطريقة مع التكاملات التي تشتمل على دالتين واحدة سهلة في إشتقاقها والأخرى سهلة في تكاملها / من أمثلة هذه التكاملات

$$\int x e^{x}\,dx \quad , \quad \int x^{2} \cos x\,dx$$

حيث أن الدوال x, x^2 / ... يمكن إشتقاقها بسهولة في المقابل فإن الدوال $\cos x$, e^x / ... يمكن تكاملها بسهولة.

أمثلة أخرى $\int \ln x\,dx$ حيث الدالة $f(x) = \ln x$ يمكن إشتقاقها بسهولة و الدالة $g(x) = 1$ يمكن تكاملها بسهولة.

Examples:

1) $\int x \cos x\,dx$

$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$$= uv - \int v\,du = x \sin x - \int \sin x\,dx = \boxed{x \sin x + \cos x + C}$$

Remark: There are four choices available for u and dv in Example 1:

1. Let $u = 1$ and $dv = x\cos x\,dx$.
2. Let $u = x$ and $dv = \cos x\,dx$.
3. Let $u = x\cos x$ and $dv = dx$.
4. Let $u = \cos x$ and $dv = x\,dx$.

نلاحظ أنه الإختيار الثاني هو الإختيار الذي إستخدم لحل المثال السابق بطريقة الأجزاء، ولكن ماذا عن بقية الإختيارات؟

إن بعض الإختيارات بإستخدام طريقة التكامل بالأجزاء تنتج تكاملات أعقد من التكامل الأساسي، مثال ذلك إذا أخذنا الخيار الثالث، فإن التكامل الناتج

$$\int x\cos x\,dx = x^2\cos x - \int x\cos x - x^2\sin x\,dx$$

نلاحظ أيضاً أن أحد الخيارات هو خيار محايد وهو الخيار الأول، حيث أننا بحاجة لإيجاد $v = \int x\cos x\,dx$ وهو التكامل الأساسي،

وعليه، فإنه بطريقة التكامل بالأجزاء، قد يكون هناك أكثر من خيار لـ dv , u ، بعض هذه الخيارات ينتج تكاملات سهلة، البعض الآخر ينتج تكاملات صعبة، ويمكن الحكم على نجاح طريقة التكامل بالأجزاء إذا كان التكامل الناتج بعد التحويل هو تكامل سهل يمكن التعامل معه.

هنا تجدر الإشارة أنه لا توجد آلية محددة لإختيار u أو dv في جميع التكاملات، وبشكل عام، يتم إختيار dv لتشتمل على dx دالة سهلة التكامل، وبهذا تكون u هو ما تبقى في داخل التكامل ويراعى أنه يكون سهل الإشتقاق.

2) $\int \ln x\,dx$

Sol: Take $u = \ln x$ $\quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \quad v = x$

$$\therefore \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \boxed{x\ln x - x + C}$$

3) $\int x^2 e^x \, dx$ (Repeated used)

Sol: Take $u = x^2$ $\qquad dv = e^x \, dx$

$du = 2x \, dx \qquad v = e^x$

$$\therefore \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx \qquad \text{------- } (*)$$

Consider $\int x e^x \, dx$ and take $u = x \qquad dv = e^x \, dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

عوضها في (*) نحصل على

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C$$

$$= \boxed{e^x (x^2 - 2x + 2) + C}$$

Tabular Integration

عندما يكون هناك حاجة لتطبيق التكامل بالأجزاء بشكل مكرر، وعندما تكون هناك دالة u يمكن إشتقاقها حتى الصفر، ودالة dv يمكن تكاملها بسهولة أمام كل إشتقاق، فإنه يمكن تطبيق التكامل بالأجزاء مكرر بسهولة من خلال جدول كما يوضح المثال التالي:

$\int x^2 e^x \, dx$

$f(x)$		$g(x)$
x^2		e^x
$2x$	$+$	e^x
2	$-$	e^x
0	$+$	e^x

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C = \boxed{e^x (x^2 - 2x + 2) + C}$$

4) $\int x^4 \cos x \, dx$

$f(x)$		$g'(x)$
x^4	$+$	$\cos x$
$4x^3$	$-$	$\sin x$
$12x^2$	$+$	$-\cos x$
$24x$	$-$	$-\sin x$
24	$+$	$\cos x$
0		$\sin x$

$$= x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \sin x - 24x \cos x + 24 \sin x + C$$

Integration by Parts Formula for Definite Integrals

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad (3)$$

5) $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$

$u = \tan^{-1} x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{1+x^2} \qquad v = x$

$$= x \tan^{-1} x \Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$u = 1 + x^2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2} du = x\,dx$

$x = 0 \longrightarrow u = 1$

$x = 1 \longrightarrow u = 2$

$$= \tan^{-1} 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln|u| \Big]_1^2$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln 2}$$

Solving for Unknown Integrals:

في بعض التطبيقات المكررة لطريقة التكامل بالأجزاء يكون التكامل الناتج نفس التكامل الأساسي ، ويتم حل مثل هذه التكاملات كما يتم في المعادلات بنقله للطرف الأيسر مع استبداله بالثابت C كما يوضح المثال التالي :

6) $\int e^{x}\cos x \, dx$

Sol:

$u = e^{x} \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = e^{x}dx \qquad v = \sin x$

$$\int e^{x}\cos x \, dx = e^{x}\sin x - \int e^{x}\sin x \, dx$$

$u = e^{x} \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = e^{x}dx \qquad v = -\cos x$

$$= e^{x}\sin x - \left[-e^{x}\cos x + \int e^{x}\cos x \, dx \right]$$

نفس التكامل الأساسي

$$\int e^{x}\cos x \, dx = e^{x}(\sin x + \cos x) - \int e^{x}\cos x \, dx$$

عملية حل للتكامل بطريقة المعادلات

$$\therefore \; 2\int e^{x}\cos x \, dx = e^{x}(\sin x + \cos x) + C$$

$$\therefore \; \boxed{\int e^{x}\cos x \, dx = \frac{e^{x}}{2}(\sin x + \cos x) + C}$$

ملحوظة: لتسهيل حل المثال السابق يمكن الإستعانة بفكرة الجدولة رغم عدم وجود دالة يمكن إشتقاقها للصفر، مع الإنتباه أن السهم المائل يمثل عملية ضرب $u \cdot v$ من قانون التكامل بالأجزاء، وبالتالي فإن السهم الأفقي هو الذي يمثل التكامل المحول $\int v \, du$ كما يوضح المثال التالي:

$$\int e^{x}\cos x \, dx$$

$f(x)$		$g(x)$
e^{x}	$+$	$\cos x$
e^{x}	$-$	$\sin x$
e^{x}	$+$	$-\cos x$

هذا السهم يمثل عملية تكامل

$$= e^{x}\sin x + e^{x}\cos x - \int e^{x}\cos x \, dx$$

أكمل كما في الأعلى.

Reduction Formulas:

هي صيغ تحتوي على تكامل بأس n يتم استبداله بتكامل مشابه ولكن بأس أقل .

Example: Find a reduction formula for the integral

$$\int \cos^n x \, dx$$

sol: $\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \;\; \cos x \, dx$

$u = \cos^{n-1} x \qquad\qquad dv = \cos x \, dx$

$du = (n-1) \cos^{n-2} x \cdot -\sin x \, dx \qquad v = \sin x$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

نفس التكامل الأصلي

$$n \int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

For Example:

بنعوض مرة أخرى n=2

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4} \left[\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} \int dx \right]$$

$$= \boxed{\frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + C}$$

فيما يلي بعض صيغ الإختزال التي يمكن اثباتها بطريقة مشابهة لما سبق :

1) $$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx$$

2) $$\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\, dx$$

3) $$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx, \quad a \neq 0$$

4) $$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$$

غير مطلوب حفظها ، المطلوب التدرب على استخدامها

مع الأخذ بعين الاعتبار انه أول ثلاث صيغ تحل بسهولة من خلال الجدولة

Example:

$$\int \ln^2 x\, dx \overset{(n=2)}{=} x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx$$

(n=1) مرة أخرى $$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - 1\int dx\right)$$

$$= \boxed{x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C}$$