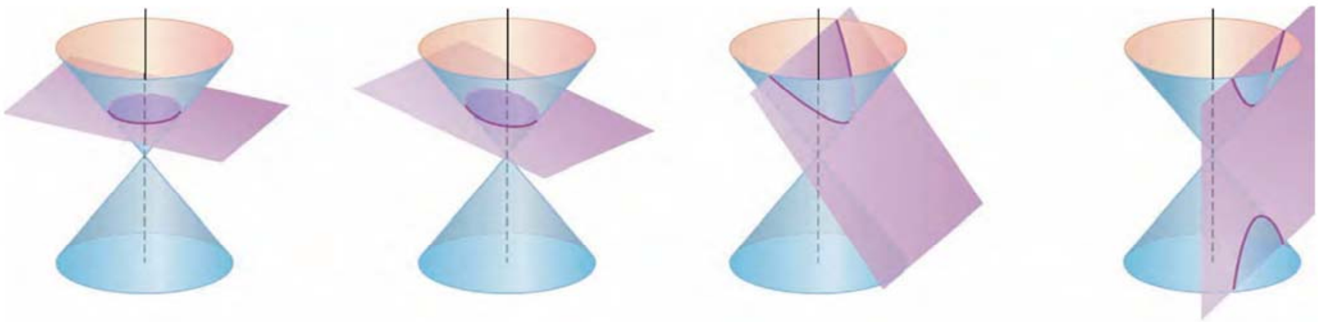
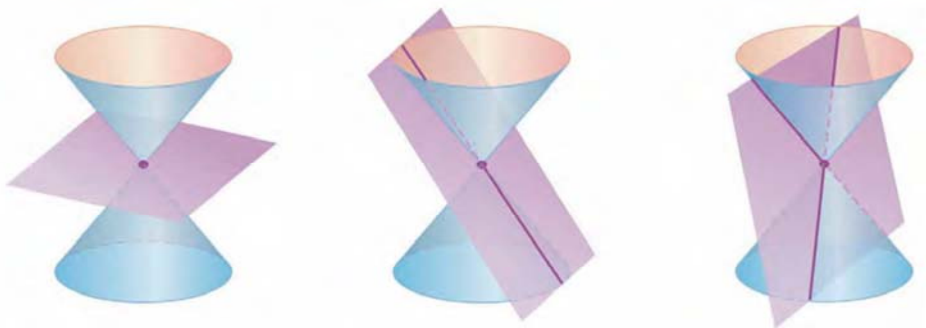
11.6 Conic Sections

مقدمة : سميت القطوع المخروطية بهذا الإسم لإمكانية الحصول عليها من تقاطع مستوى مع مخروطين متعاكسين ومتقابلين بالرأس ، و الأشكال الناتجة هي إما دائرة ، أو قطع ناقص أو زائد أو مكافئ ، وإما نقطة أو خط واحد أو خطين متقاطعين ، انظر الرسومات .



Circle: plane perpendicular to cone axis | Ellipse: plane oblique to cone axis | Parabola: plane parallel to side of cone | Hyperbola: plane cuts both halves of cone

(a)



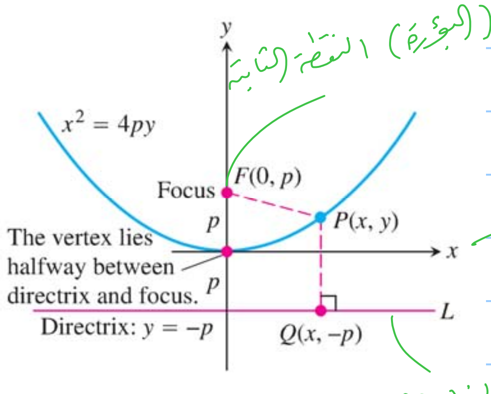
Point: plane through cone vertex only | Single line: plane tangent to cone | Pair of intersecting lines

(b)

Parabolas:

DEFINITIONS A set that consists of all the points in a plane equidistant from a given fixed point and a given fixed line in the plane is a **parabola**. The fixed point is the **focus** of the parabola. The fixed line is the **directrix**.

يجب أن تكون المسافة PF مساوية للمسافة PQ



النقطة الثابتة (البؤرة)

محور x

الخط الثابت (الدليل)

معادلة القطع المكافئ : إذا كانت البؤرة للقطع المكافئ $F(0,p)$ وكانت معادلة الخط المستقيم الدليل $y=-p$ حيث $p>0$ هو رقم ما إيجابي

معادلة القطع المكافئ يمكن اشتقاقها من مساواة المسافة بين نقطة ما $p(x,y)$ على المنحنى للقطع المكافئ وبين البؤرة $\overline{PF}$ مع المسافة بين $p(x,y)$ و الدليل $\overline{PQ}$.

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}.$$

ساوي الطرفين وربع وأكمل الحسابات نحصل على

$$x^2 = 4py \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4p} x^2} \quad \text{-----}(*)$$

تعريفات :

1- يسمى الخط الذي يمر بالبؤرة عمودياً على الدليل محور تماثل القطع المكافئ axis of symmetric (اختصاراً المحور axis) .

2) نقطة المنتصف بين البؤرة و الخط الدليل تسمى الرأس (vertex) ، وهي نقطة تقاطع محور التماثل مع القطع المكافئ .

3) الرقم $p>0$ في المعادلة (*) يسمى focal length ويكون موجب دائماً ويمثل المسافة بين الرأس و البؤرة وهي نفس المسافة بين الرأس و الدليل .

ملحوظات : بخصوص المعادلة (*) أعلاه نلاحظ أنها معادلة قياسية

حسب الوضع الذي درسناه و هناك أربع حالات للقطع المكافئ حسب ما يلي :

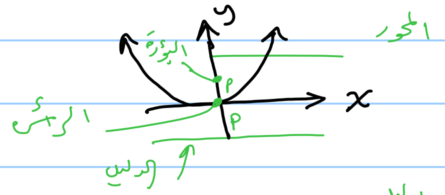
- يكون محور التماثل موازياً للمحور الغير مربع (إذا لم يكن هناك إزاحة يكون هو نفسه)
- اتجاه الفتحة يكون حسب الإشارة ؛ في اتجاه الشق الموجب للمحور إذا كانت الإشارة موجبة و للشق السالب للمحور إذا كانت الإشارة سالبة .
- باستخدام الإزاحة ، يكون رأس القطع المكافئ في المعادلة

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

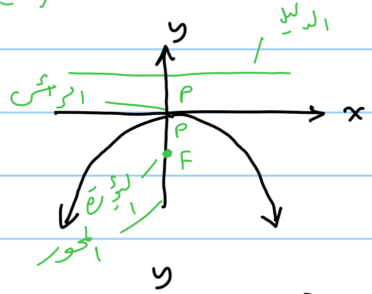
عند النقطة $V(h,k)$.

Illustration:

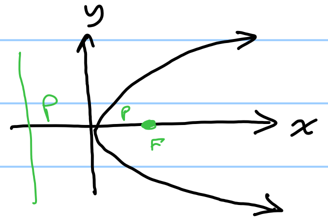
a) $x^2 = 4py$



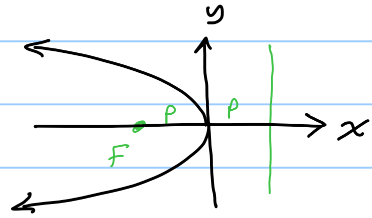
b) $x^2 = -4py$



c) $y^2 = 4px$



d) $y^2 = -4px$



Examples: 1) Find the eq of the parabola whose vertex $V(4,-3)$ and focus $F(8,-3)$, then find the directrix and the axis.

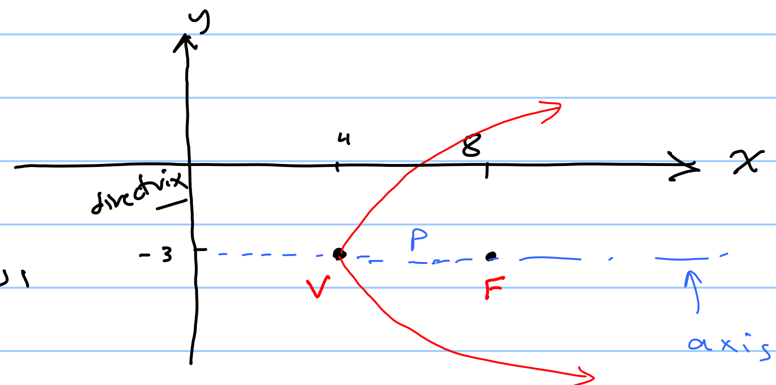
sol:

open: right

vertex-to-focus distance:

$p = 4$

الإزاحة تعوض في الرأس



$\therefore \ (y+3)^2 = +4p(x-4)$

$\therefore \ \boxed{(y+3)^2 = 16(x-4)}$

axis: $\boxed{y=-3}$, Directrix: $\boxed{x=0}$

2) Find the focus, the vertex, the directrix and the axis of the parabola

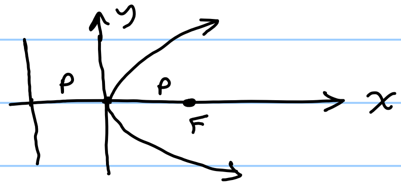
a) $x = \frac{y^2}{10}$

sol: Rewrite the eq in the standard form $y^2 = 10x$

$\Longrightarrow \quad y^2 = 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right) x$

هذه معادلة قطع مكافئ محوره هو x (لعدم وجود إزاحات) و اتجاه الفتحة لليمين

و الطول البؤري هو $p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$



vertex: $V(0,0)$

focus: $F(5/2, 0)$

axis: x - axis $(y=0)$

Directrix: $\boxed{x = -5/2}$

b) $x^2 + 2x + 4y - 11 = 0$

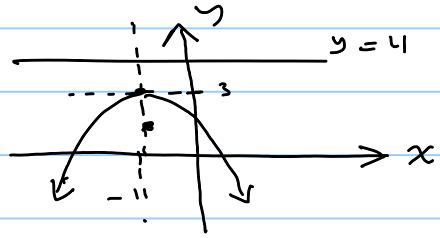
sol: $(x^2 + 2x + 1 - 1) = -4y + 11$

$\therefore \quad (x+1)^2 = -4y + 12 = -4(y-3)$ ——— قطع مكافئ

sol: له نفس رسمة القطع المكافئ $x^2 = -4y$ بعد إزاحته $\overset{3}{\uparrow} \underset{1}{\leftarrow}$

Vertex: $V(-1, 3)$

focal length: $p = 1$



axis: $x = -1$

open: down

focus: $F(-1, 2)$

Directrix: $y = 4$.

Ellipses

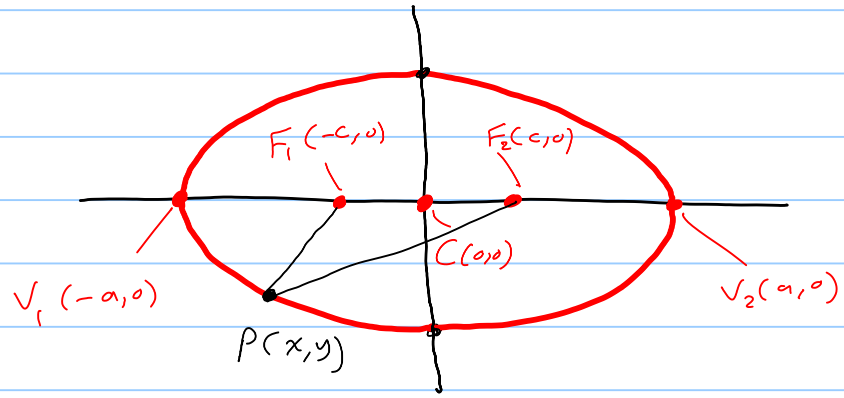
DEFINITIONS An **ellipse** is the set of points in a plane whose distances from two fixed points in the plane have a constant sum. The two fixed points are the **foci** of the ellipse.

The line through the foci of an ellipse is the ellipse's **focal axis**. The point on the axis halfway between the foci is the **center**. The points where the focal axis and ellipse cross are the ellipse's **vertices** (Figure 11.39).

Eq of an Ellipse:

Given an ellipse centered at the origin with two foci $F(\pm c, 0)$ where:

$c :=$ center – to – focus distance.



If the constant distance equals $2a$, then we have

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

إذا قمنا بعملية الحسابات / نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

عرف الرقم الجديد b كالتالي

$$b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

وبالتالي المعادلة هي

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

ملحوظات هامة: ١- في المعادلة السابقة ، الرقم a^2 هو الرقم الأكبر ($a^2 > b^2$) ، والمعادلة السابقة هي معادلة قياسية فإذا أردنا محور البؤر نوجد الرقم a^2 ، الأكبر.

٢- نلاحظ أن نقاط الرأسية ، البؤرية والمركز جميعها تقع على محور البؤر لذا فإنها تحقق معادلته.

٣- عندما تتساوى a, b فإن $c = 0$ وبالتالي نحصل على معادلة دائرة كحالة خاصة من القطع الناقص.

٤- باستخدام الإزاحة ، فإن مركز القطع الناقص في المعادلة

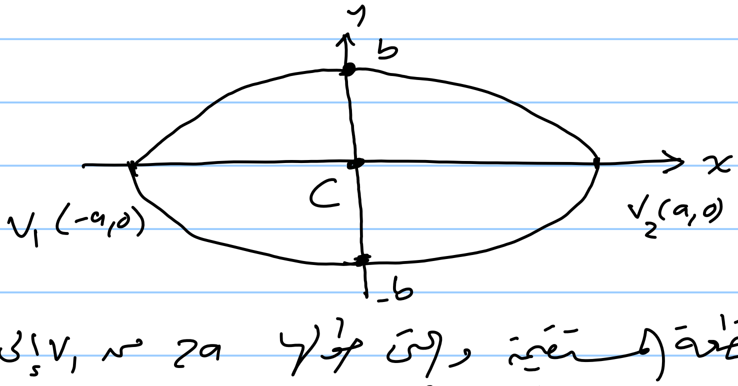
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

هو $C(h,k)$.

رسم القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

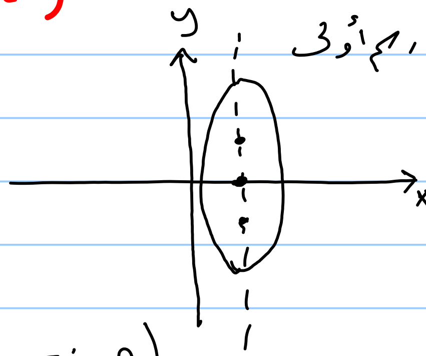
نلاحظ أنه عندما $y=0$ نحصل على مقاطع x وهي $\mp a$ وعندما $x=0$ نحصل على مقاطع y $\mp b$ وبالتالي يكون رأسي القطع الناقص عند $V_1(-a,0), V_2(a,0)$



تعريفات : ١) القطعة المستقيمة والتي طولها $2a$ من V_1 إلى V_2 تسمى Major axis ، والرقم a هنا يسمى Semimajor axis.

٢) القطعة المستقيمة والتي طولها $2b$ من النقطة $B_1(0,-b)$ إلى $B_2(0,b)$ تسمى minor axis ، والرقم b هنا يسمى semi minor axis.

Examples: 1) Find the eq of the ellipse centered at $C(1,0)$ with semimajor axis 2 and one focus $F_1(1,\sqrt{2})$.



<u>sol:</u> Center: $C(1,0)$

One focus: $F_1(1,\sqrt{2})$

$\therefore$ focal axis: $\boxed{x=1}$

(لأنه المركز والبؤر يجب أن تحقق معادلته).

$a=2$ and $c=\sqrt{2}$ (المسافة بين المركز والرأس)

$\therefore b^2 = 4-2 = 2$

لاحظ أنه أن محور البؤر يوازي محور y وهناك إزاحة وحدة واحدة على اليمين.

$\therefore$ eq of the ellipse is

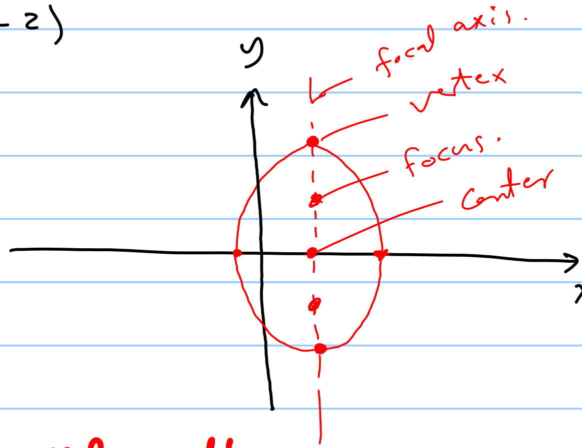
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{(x-1)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1}$$

$\therefore$

<u>foci:</u> $F_1(1,\sqrt{2})$, $F_2(1,-\sqrt{2})$

<u>vertices:</u> $V_1(1,2)$, $V_2(1,-2)$



2) Find all information about the ellipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

sol: $a = 4$, $b = 3 \Longrightarrow$

Center - to - focus distance $c = \sqrt{7}$

Center: $C(0,0)$ [إذا كان هناك إزاحة إثباتها تظهر في المركز]

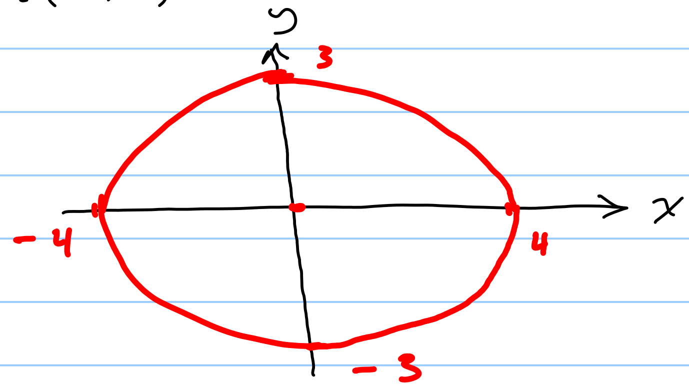
focal axis: $y = 0$ (x-axis) [يوازي المحور تحته a^2 ، والمركز يحقق معادلته]

foci: $F(0 \mp c, 0)$ [من المركز نضيف ونطرح c ، مع مراعاة أنها على محور البؤر وبالتالي تحقق معادلته]

$\therefore F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$

Vertices: $V(0 \mp a, 0)$ [من المركز نضيف ونطرح a ، مع مراعاة أنها تقع على محور البؤر وبالتالي تحقق معادلته]

$V_1(-4, 0)$, $V_2(4, 0)$



2) $3(x+1)^2 + \frac{4}{3}(y-2)^2 = 12$

sol: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

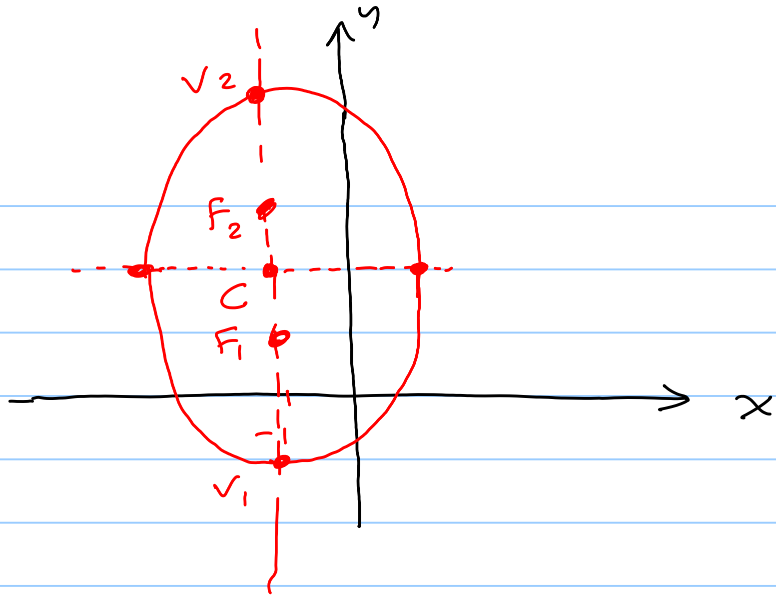
$a = 3$, $b = 2 \Longrightarrow c = \sqrt{5}$

Center: $C(-1, 2)$

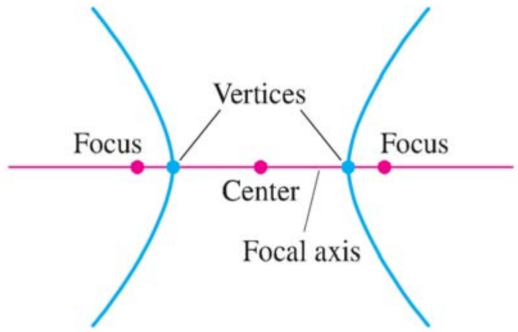
focal axis: $x = -1$ (يوازي محور y ويحقق معادلة المركز)

foci: $F(-1, 2 \mp c)$ $\{F_1(-1, 2-\sqrt{5}), F_2(-1, 2+\sqrt{5})\}$

Vertices: $V(-1, 2 \mp a)$ $\{V_1(-1, -1), V_2(-1, 5)\}$



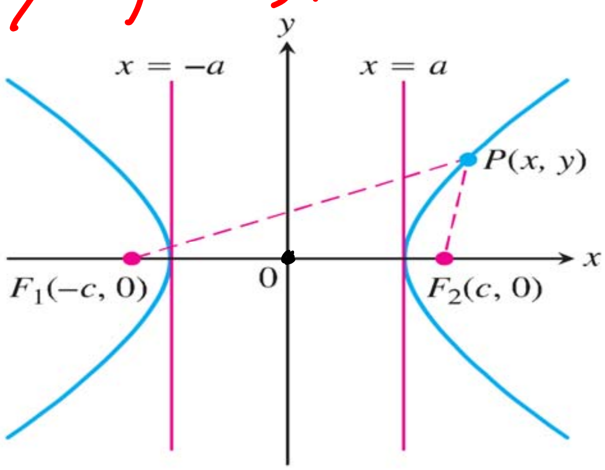
Hyperbolas:



DEFINITIONS A **hyperbola** is the set of points in a plane whose distances from two fixed points in the plane have a constant difference. The two fixed points are the **foci** of the hyperbola.

The line through the foci of a hyperbola is the **focal axis**. The point on the axis halfway between the foci is the hyperbola's **center**. The points where the focal axis and hyperbola cross are the **vertices** (Figure 11.42).

Eg of Hyperbolas



إذا كان المركز عند نقطة الأصل ، وكانت c هي المسافة بين المركز والبؤرتين ، وكان الفرق الثابت من التعريف هو 2a ، ومحور البؤر هو محور x ، فإنه

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

وبعد الحسابات / نحصل على المعادلة /

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

نعرف الرقم b كما يأتي :

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

لذا فإن المعادلة تأخذ الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ملاحظات هامة : ١- رغم التشابه بين علاقة القطع الزائد و القطع الناقص الا أن معادلة c المسافة بين المركز و البؤرة مختلفة في الحالتين .

٢ - محور البؤر هنا يوازي المحور الموجب في المعادلة السابقة (في حال لم يكن هناك إزاحة / يكون هو نفسه المحور الموجب) .

٣ - نحدد الرقم a في المعادلة السابقة بأنه الرقم تحت المتغير الموجب (ليس الرقم الأصغر أو الأكبر هنا) فقد يكون أكبر من b وقد يكون أصغر أو مساوياً لـ b

٤ - المركز / البؤرتين و الرأسين / كلها نقاط تقع على محور البؤر / لذا فإنها يجب أن تحقق معادلته .

٥ - باستخدام الإزاحة / فإن مركز القطع الزائد

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

هو $C(h,k)$.

Asymptotes and Graphs

لأي قطع زائد $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ / يوجد خطي تماثل يساوي

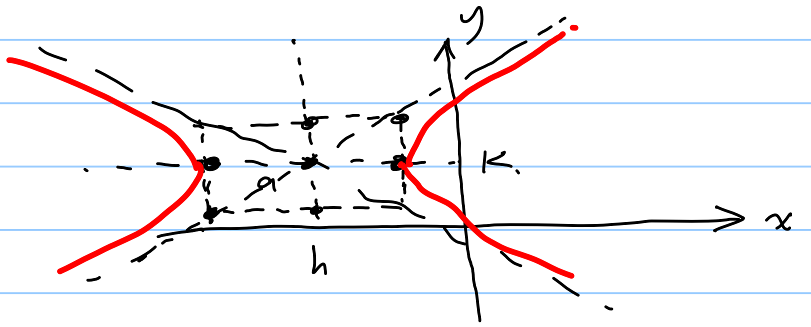
على رسم القطع الزائد، ويمكن الحصول على معادلتيهما باستبدال الحد 1 من المعادلة بالعدد صفر كما يلي :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

ويرسم القطع الزائد كما يلي :

(*) من المركز وفي اتجاه محور البؤر نضع نقطتي الرأسين على بعد مسافة a .

(*) لرسم خطي التماثل، نضع نقطتين على بعد b من المركز في اتجاه عمودي على محور البؤر ثم نقوم برسم مستطيل مركزه (h,k) وأطوال أضلاعه $2a$ و $2b$



في هذه الحالة يكون خطي التماثل هما الخطان اللذان يمران بالحواف مروراً بالمركز .

بعدها نقوم برسم القطع الزائد من عند الرأسين مع مراعاة وجود خطوط التماثل .

Examples: Find all informations about :

1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

Sol: The eq is hyperbola with $a = 2$ and $b = \sqrt{5}$

so the center-to-focus distance is $c = \sqrt{4+5} = 3$.

Center: $C(0,0)$

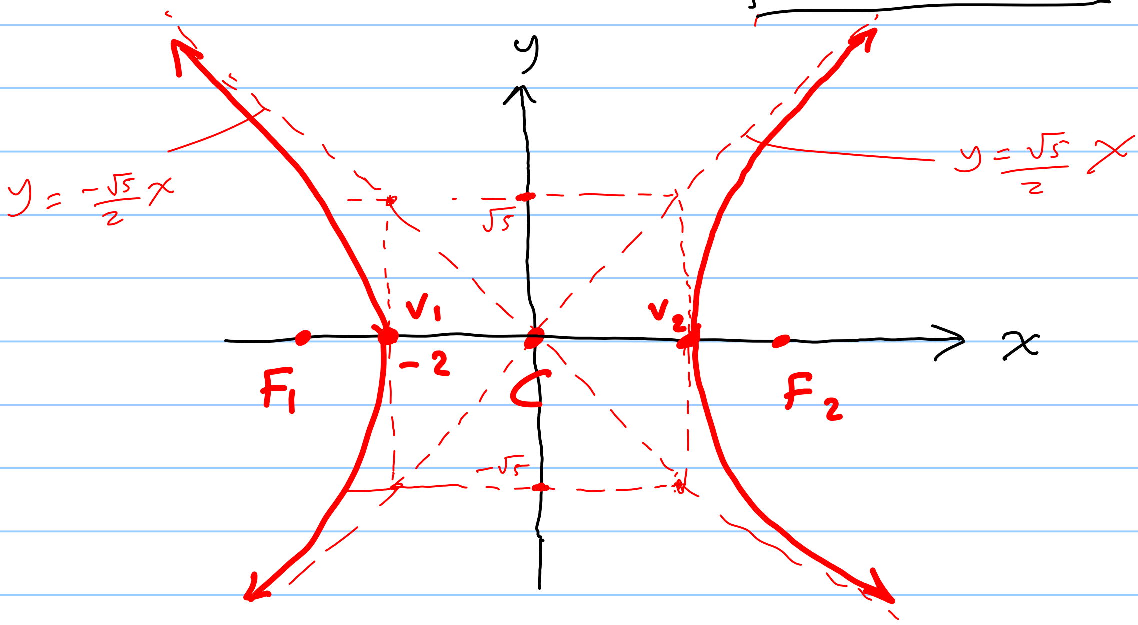
focal axis: $y = 0$ (محور x لعدم وجود إزاحة)

foci: $F(0 \mp c, 0)$ $[F_1(-3,0) , F_2(3,0)]$

vertices: $V(0 \mp a, 0)$ $\left[V_1(-2,0) , V_2(2,0) \right]$

Asymptotes: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 0 \Longrightarrow$

$y^2 = \frac{5}{4} x^2 \Longrightarrow \boxed{y = \mp \frac{\sqrt{5}}{2} x}$



2) $9y^2 + 54y - 16x^2 + 64x - 127 = 0$

sol: أكمل المربعات

$9(y^2 + 6y + 9 - 9) - 16(x^2 - 4x + 4 - 4) = 127$

$\Rightarrow 9(y+3)^2 - 16(x-2)^2 = 127 + 81 - 64 = 144$

$\Rightarrow \frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$

eq of hyperbola with $a = 4$ and $b = 3$. So, $C = 5$.

Center: $C(2, -3)$

focal axis: $\boxed{x = 2}$ (يوازي محور y)

(لاحظ أن نقطة المركز يجب أن تحقق معادلته .

foci: $F(2, -3 \mp c)$ $[F_1(2,-8), F_2(2,2)]$

vertices: $V(2, -3 \mp a)$ $[V_1(2,-7), V_2(2,1)]$

Asymptotes: $$\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 0$$

$$\Longrightarrow y+3 = \mp \frac{4}{3}(x-2)$$

$$\therefore \boxed{y = -3 \mp \frac{4}{3}(x-2)}$$