10.2 Infinite Series

An infinite Series (or simply a series) is the sum of an infinite sequence of numbers

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

يهدف هذا الفصل لتوضيح المعنى لجمع عدد لا نهائي من الأرقام و تطوير طرق رياضية لحساب هذا المجموع . لاحظ أن المتسلسلات هي مجموع لا نهائي من الأرقام / ولا نستطيع حساب هذا المجموع فقط بإضافة الحدود ومعرفة الناتج .

DEFINITIONS Given a sequence of numbers $\{a_n\}$, an expression of the form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

is an **infinite series**. The number a_n is the ***n*th term** of the series. The sequence $\{s_n\}$ defined by

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$\vdots$$

is the **sequence of partial sums** of the series, the number s_n being the ***n*th partial sum**. If the sequence of partial sums converges to a limit L, we say that the series **converges** and that its **sum** is L. In this case, we also write

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

If the sequence of partial sums of the series does not converge, we say that the series **diverges**.

Illustrations:

1) For the series $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\cdots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1+2 = 3$

$S_3 = 1+2+3 = 6$

$\vdots$

$S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\vdots$

So the sequence of partial sum is

$$\{S_n\} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \left\{1, 3, 6, 10, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}, \cdots\right\}.$$

Since

$\lim S_n = \lim \frac{n(n+1)}{2} = \infty$ then the series $\sum_{n=1}^{\infty} n$ is diverges.

2) For the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

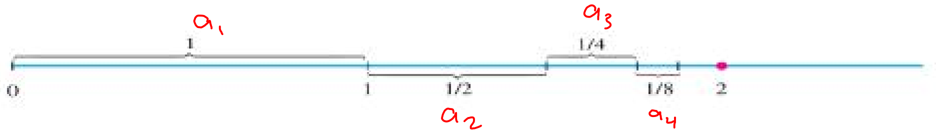
we add the terms one at a time from the beginning and look for a pattern in how these partial sums grow.

Partial sum		Value	Suggestive expression for partial sum
First:	$s_1 = 1$	1	$2 - 1$
Second:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
Third:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
nth:	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

So the seq of partial sum is $\{S_n\} = \left\{2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$.

Since $\lim S_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2$, then the series is convergent and we write

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$



3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+1-\cdots$

$S_1=-1$, $S_2=0$, $S_3=-1$, $S_4=0$, ...

so the seq. of partial sum is $\{S_n\}=\{-1,0,-1,0,-1,\ldots\}$

Clearly $\lim_{n\to\infty} S_n$ d.n.e.

so $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ is divergent series.

نلاحظ مما سبق أنه لتحديد ما إذا كانت متسلسلة ما تقاربية أم لا، فإنه يلزمنا إيجاد متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ ثم أخذ النهاية لها، وحقيقة أنه لحساب $\lim_{n\to\infty} S_n$ فإنه يلزمنا معرفة قانون محدد للحد العام S_n في متتابعة المجاميع الجزئية، لكننا سنلاحظ فيما بعد أننا لا نستطيع إيجاد قانون عام لـ S_n في كثير من المتسلسلات، مما يسبب عجزنا في تحديد ما إذا كانت المتسلسلة تقاربية أم لا.

هناك نوعين من المتسلسلات تمتازان بأنه يمكن دائماً إيجاد قانون عام لـ S_n ومن ثم حساب النهاية $\lim_{n\to\infty} S_n$ وتحديد قيمة المتسلسلة وهما المتسلسلات الهندسية (Geometric Series) والمتسلسلات التليسكوبية (Telescoping Series)

Geometric Series

Geometric series are series of the form

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

in which a and r are fixed real numbers and $a \neq 0$. The series can also be written as $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. The **ratio** r can be positive, as in

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots, \qquad r = 1/2, a = 1$$

or negative, as in

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots. \qquad r = -1/3, a = 1$$

Note that if $r=1$ then the G.S. has the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a + a + a + \cdots$$

so the seq. of partial sum $S_n = a + a + \cdots + a = n \cdot a$

Hence $\lim_{n\to\infty} S_n = \mp\infty$ (حسب إشارة a)

Thus, the G.S. is div. if $r=1$.

Similarly if $r=-1$, then the G.S. is

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$ div. (تم علاجها سابقاً)

Now, if $|r| \neq 1$, then the G.S

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

has seq. of partial sum with nth-term

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Now if $|r| < 1$ then $r^n \longrightarrow 0$ and hence

$$S_n \longrightarrow \frac{a}{1-r}.$$

if $|r| > 1$ then $|r^n| \longrightarrow \infty$ and $\{S_n\}$ is div.

Therefore we conclude that

If $|r| < 1$, the geometric series $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ converges to $a/(1-r)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

If $|r| \geq 1$, the series diverges.

Examples: Discuss the Convergence of the following:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Sol: The series is geometric with $a=1$ and $r=\frac{1}{2}$. Since $|r|=\frac{1}{2}<1$, the series is convergent and

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2}$$

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

Sol: The series is geometric with $a=\frac{-1}{27}$ and $r=-\frac{1}{3}$. Since $|r|=\frac{1}{3}<1$, the series is convergent and

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{a}{1-r} = \frac{-1/27}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-1}{36}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)2^{n}$ is G.S. with $r=2$ and since $|r|>1$, the series diverges.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-3)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}$

Sol: The series is geometric with $a=\frac{3}{2}$ and $r=\frac{-1}{2}$. Since $|r|<1$ so it is convergent to $\frac{a}{1-r} = \frac{3/2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \boxed{1}$

5) Express the repeating decimal $4.134343434\cdots$ as the ratio of two integers.

Sol: $4.1343434\cdots = 4.1 + 0.034 + 0.00034 + 0.0000034 + \cdots$

$$= 4.1 + \frac{34}{1000} + \frac{34}{100000} + \frac{34}{10000000} + \cdots$$

$$= 4.1 + \frac{34}{10^3}\Big[\underbrace{1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots}_{\text{G.S. with } a=1 \text{ and } r=\frac{1}{100}}\Big]$$

$$= \frac{41}{10} + \frac{34}{10^3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) = \frac{41}{10} + \frac{34}{10^3}\cdot\frac{100}{99}$$

$$= \frac{41}{10} + \frac{34}{990} = \boxed{\frac{4093}{990}}$$

Telescoping Series:

هو نوع من المتسلسلات نستطيع فيه تكوين قانون عام لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ عن طريق حذف أرقام داخلية للحد النوني S_n وبقاء الرقم الأول والأخير على الأغلب، وقد يكون غير ذلك. الأمثلة التالية توضح هذا النوع:

Examples: Discuss the convergence of the following series:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots$$

Sol: إذا قمنا بحساب متتابعة المجاميع الجزئية مباشرة، فإننا لن نستطيع إيجاد قانون عام بهذه الصورة كالتالي:

$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$, $\quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}$, $\quad \cdots$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = ??$$

لذلك نستخدم فكرة الكسور الجزئية (partial fraction) كالتالي:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \overset{\text{بعد الحسابات}}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

لذلك

$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $\quad S_2 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$

$S_3 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$,

$\vdots$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

so the seq of partial sum $\{S_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}$,

and $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \boxed{1}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

sol: $S_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad S_2 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$S_3 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$\vdots$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

so, the series is telescoping and

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 \quad \text{so}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = 1.$$

The nth-term test for a Divergent series.

أحد أهم أسباب تباعد المتسلسلات هو هو أن حدودها لا تكون صغيرة عندما تزيد قيم n ، انظر المثال التالي :

Example: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots$$

هي متسلسلة جميع حدودها أكبر من 1 وبالتالي سيكون $S_n > n$

لذلك فإن $\{S_n\}$ هي متتابعة غير محدودة وبالتالي ستكون متباعدة /

لاحظ هنا أن $a_n = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$.

Thrm: If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges then $a_n \to 0$

PF: Since $\sum a_n$ converges, then the seq of partial sum S_n converges to some number say s.

So $S_n \to s$ which implies $S_{n-1} \to s$.

But $a_n = S_n - S_{n-1} \Longrightarrow$

$$\lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = s - s = 0$$

$\square$

ملحوظات: ١- النظرية تكافئ النص التالي:

"If $a_n \not\to 0$ then $\sum a_n$ diverges"

وبالتالي فإنه إذا كانت نهاية الحد النوني $\lim a_n$ غير موجودة أو تتقارب لرقم آخر غير الصفر فإن المتسلسلة تكون متباعدة.

٢- عكس النظرية غير صحيح فإذا كانت $a_n \to 0$ فإن المتسلسلة $\sum a_n$ ليس بالضرورة تقاربية كما يوضح المثال التالي:

Example: المتسلسلة

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ terms}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ terms}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ terms}} + \cdots$$

متباعدة لانه حدودها يمكن تجميعها بأي عدد لانهائي من التجميعات كل منها يساوي ١. رغم ذلك لاحظ أن $a_n \to 0$.

من sec 10.3 سندرس بالطريقة ما يجب ما يعرف باسم (harmonic series) وهي المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

وبطريقة ما يجب سنثبت أنها تباعدية ، رغم ذلك فإن $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

Examples: All the following series are divergent since $a_n \not\to 0$ as $n \to \infty$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ $\quad (n^2 \to \infty)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ $\quad \left(\frac{-n}{2n+5} \longrightarrow -\frac{1}{2}\right)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ $\quad \left(\lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ d.n.e}\right)$

Combining Series

THEOREM 8 If $\sum a_n = A$ and $\sum b_n = B$ are convergent series, then

1. *Sum Rule:* $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$
2. *Difference Rule:* $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$
3. *Constant Multiple Rule:* $\sum ka_n = k\sum a_n = kA$ (any number k).

ملحوظة : لا يجوز توزيع المجموع على $a_n \mp b_n$ إذا كان أحد أو كلا المجاميع تباعدي .

Corollaries:

1. Every nonzero constant multiple of a divergent series diverges.
2. If $\sum a_n$ converges and $\sum b_n$ diverges, then $\sum(a_n + b_n)$ and $\sum(a_n - b_n)$ both diverge.

تنويه: إذا كان كلا المتسلسلتين تباعديتان، فليس بالضرورة أن يكون المجموع تباعدي. انظر المثال التالي:

Example: $\sum a_n = \sum 1$ is div.
$\sum b_n = \sum -1$ is div.

But $\sum (a_n + b_n) = \sum 0$ is convergent.

Examples: 1) Find the sum of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}}$$

sol: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\tfrac{1}{6}\right)^{n-1} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{6}\right)^{n-1} \quad (\text{Since each one is conv. G.S})$$

$$= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right) = 2 - \frac{6}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{8}$$

Adding or Deleting Terms

إن إضافة أو إزالة أي عدد محدود (finite numbers) من حدود متسلسلة ما لا يؤثر على كونها "تباعدية أو تقاربية"، ولكنه يؤثر على قيمة المتسلسلة النهائي في حال كانت المتسلسلة تقاربية.
وهذا يعني التالي:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges iff $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converges

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges iff $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ diverges

Reindexing (إعادة الترقيم)

Note that the series

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}} = \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}.$$

نفس المتسلسلة لها تعبيرات مختلفة تعتمد إما على بداية الترقيم
وإما على الأس المراد رفعه لأحد الأرقام، حيث أننا نستطيع أن
نبدأ الترقيم من الرقم الذي نريد، أو إذا أردنا رفع الأس لأحد الأرقام
حسب ما نريد. الأمثلة التالية توضح كيفية إعادة الترقيم.

Example: For the series $\sum_{n=2}^{\infty} n\, 2^{n-1}$,

a) Start the index at $n=0$.

Sol: Replace n in the series by $n+2$, to get

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)\, 2^{(n+2)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, 2^{n+1}$$

b) Write the power of 2 in the form $n+6$

Sol: Replace n in the series by $n+7$ to get

$$\sum_{n+7=2}^{\infty} (n+7)\, 2^{(n+7)-1} = \sum_{n=-5}^{\infty} (n+7)\, 2^{n+6}$$

ماكهو

3) For which values of a does the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, a\, 2^{n}}{a^{n-1}}$ converges?

sol: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^2}\cdot(-1)^{n-1} \cdot a \cdot 2 \cdot 2^{n-1}}{a^{n-1}}$ (توحيد صيغة القوى)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2a \left(\frac{-2}{a}\right)^{n-1}$$

which is G.S. with $r = \frac{-2}{a}$, so it is convergent when $|r| < 1 \Rightarrow \left|\frac{-2}{a}\right| < 1$

$\Rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| > 1 \Longrightarrow \frac{a}{2} > 1$ or $\frac{a}{2} < -1$

$\therefore\ a > 2$ or $a < -2 \Rightarrow \boxed{a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)}$

2) Find the sum of the following series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

sol: After partial fraction:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}\right) \quad \text{(telescoping)}$$

$S_1 = (3-1)$, $S_n = (3 - \cancel{1}) + (\cancel{1} - \frac{3}{5}) = 3 - \frac{3}{5}$

$S_3 = (3-\cancel{1}) + (\cancel{1} - \cancel{\tfrac{3}{5}}) + (\cancel{\tfrac{3}{5}} - \frac{3}{7}) = 3 - \frac{3}{7}$

$\vdots$

$S_n = (3-\cancel{1}) + (\cancel{1} - \cancel{\tfrac{3}{5}}) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{3}{2n-1}} - \frac{3}{2n+1}\right) = 3 - \frac{3}{2n+1}$

Consider $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{3}{2n+1}\right) = 3$.

So the series converges to $\boxed{3}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan^{-1} n - \tan^{-1}(n+1)\right)$

sol: The series is telescoping.

$S_1 = \left(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 2\right)$, $S_2 = \left(\tan^{-1} 1 - \cancel{\tan^{-1} 2}\right) + \left(\cancel{\tan^{-1} 2} - \tan^{-1} 3\right) = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 3$

$S_3 = \left(\tan^{-1} 1 - \cancel{\tan^{-1} 2}\right) + \left(\cancel{\tan^{-1} 2} - \cancel{\tan^{-1} 3}\right) + \left(\cancel{\tan^{-1} 3} - \tan^{-1} 4\right) = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 4$

$\vdots$

$S_n = \left(\tan^{-1} 1 - \cancel{\tan^{-1} 2}\right) + \left(\cancel{\tan^{-1} 2} - \cancel{\tan^{-1} 3}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tan^{-1} n} - \tan^{-1}(n+1)\right)$

$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(n+1) = \pi/4 - \tan^{-1}(n+1)$

Consider $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\pi/4 - \tan^{-1}(n+1)\right) = \pi/4 - \pi/2 = \frac{-\pi}{4}$

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan^{-1} n - \tan^{-1}(n+1)\right) = \boxed{\frac{-\pi}{4}}$