State

Menna Tullah Jayousi

Chapter one:

Experiment : بنقدر نكرر نعيد عدد لا نهائي من المرات.

يكون الها مخرجات محددة للتجربة اللي بتصير.

Sample outcome : the potentials of the results to the experiment.

Sample space : all the sample outcomes is called the sample space (S).

Event : any designed collection of sample outcomes, including individual outcomes, the entire sample space and the null space.

1- intersection : both \ and . $\Rightarrow \cap$
2- union : at least\ or. $\Rightarrow \cup$
3- mutually exclusive (disjoint) : $A \cap B = \emptyset$. $\xRightarrow{then}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4- complement : $\bar{A}$. / A^c.

A, B, C : 3 events لو كانوا $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ / $A \cap C = \emptyset$ / $B \cap C = \emptyset$. / $A \cap B \cap C = \emptyset$

*If it is told me to have at least one head : p(x>=1). يعني الوجه الآول والتاني لآخر رقم في الفضاء العيني

Definitions of probability :

1- classical (a prior) : P(A) = number of sample outcomes in A / number of sample outcomes in S.

2- Relative frequency (a posteriori) : P(A)= number of times A occures / number of trials. ⇒ كثير حالات عدد كثير كبير.

3- Subjective : it is defined asa person's measure of belief that some given event will occur. ⇐ حسب رأي الشخص.

4- Axiomatic :بعطيني فضاء عيني مع حدث و بوجد حسب المعطيات الي عندي

< $P(A^c)=1-P(A)$

< $P(\emptyset)=0$

< $P(A \cup B)= P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

< $P(A \cup B)= P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$

Menna Tullah Jayousi

Example : if the probability of an even number is twice as likely as that o an odd number , A ={ 6,12,18,24,30,36,42, 48}, and the sample space contains from 1-50.

P(S)=P(EVEN)+P(ODD)=1

The probability of the even number =2p

(25)(2p)+(25)(p)=1

P=1/75

< p(A)= 8(2p)=16/75.

إذا بده احتمالية لحدث معين بحيث قيمة احتمالية الرقم حسب قيمته:

S={1,2,3,4,5,6}

1k+2k+3k+4k+5k+6k=1

K=1/21

We have the event A={1,4,5} so the probability of A =(1/21)+(4/21)+(5/21)=10/21.

$P(A/B)= P(A\cap B)/P(B)$.

Two events A and B are said to be statistically independent if :

$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$

SO IT BECOMES :

$P(A/B)=P(A)\,P(B)/P(B)=P(A)$

$\Rightarrow P(A/B)=P(A\cap B)/P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\,P(A/B).$

$=P(A)\,P(B/A).$

for three events $\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\,P(B/A)\,P(C/B,A).$

A pressure control apparatus contains 4 electronic tubes. The apparatus will not work unless all tubes are operative. If the probability of failure of each tube is 0.03, what is the probability of failure of the apparatus assuming that all components work independently?

P(success)= 1-P(failure)=1-0.03=0.97 this is the probability of each of the tubes.

P(all tubes work)=0.97x0.97x0.97x0.97=0.885

P(fail)=1-0.885=0.115 .

A,B,C are three events, they are said to be statistically independent:

$P(A\cap B)=P(A)P(B).$

$P(A\cap C)=P(A)P(C).$

$P(B\cap C)=P(B)P(C).$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C).$

Menna Tullah Jayousi

The probability theorem :
He wants the probability to something defective or non defective from a lot of things.

$P(D/B)=P(D\cap B1)+P(D\cap B2)+P(D\cap B3)$.

$P(D/B)=P(B1)P(D/B1)+P(B2)P(D/B2)+P(B3)P(D/B3)$.

إذا الطلب أعرف أنيه آلة استخدمناها أكثر ⇐ $\Rightarrow P(P_1/D), P(P_2/D), P(P_3/D) \Rightarrow$ بوجبهم.

بعدين بوجد :

$P(D)=P(P_1)\,P(D/P_1)+P(P_2)\,P(D/P_2)+P(P_3)\,P(D/P_3)$.

بقارنه جواب هاد بال 3 اللي فوقه الأكثر هي اللي استخدمناها أكثر.

Counting techniques:

1- multiplication Rule : $\Rightarrow$ العملية لا تعتمد ع اختيارك السابقة.

2- permutation: without replacement (repetition is not allowed , order is important).

$$\hookrightarrow P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}$$ $\Rightarrow$ التباديل.

3- combination: order is not important. $\Rightarrow$ التوافيق

$$\hookrightarrow P_k^n=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

---

*The probability all three events occur : $\Rightarrow P(A\cap B\cap C)$.

*The probability none of the events will occur : $\Rightarrow P(\overline{A\cap B\cap C})=P(\overline{A\cup B\cup C})$
$=1-P(A\cup B\cup C)$.

Menna Tullah Jayousi

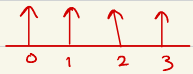
Chapter two:

Probability mass function (PMF) is valid if :

1- $P(X=x) \geqslant 0$.

2- $\sum_{x=-\infty}^{\infty} P(X=x) = 1$.

3- $P(X=x) = \begin{cases} & x=0 \\ & x=1 \\ & x=2 \\ & x=3 \\ 0 & o.w \end{cases}$



. هيك برسمها

Cumulative Distribution Function (CDF):

1- $F_X(x)=P(X\leqslant x)$.

2- $F_X(-\infty) = 0$.

3- $F_X(\infty) = 1$.

4- $P(X=x) = F(x) - F(x^-)$

*إذا طلب ال $F_X(0^+) \Leftarrow P(X \leq 0)$.

$F_X(0) \Leftarrow P(X<0)$

Probability density function (pdf): . حالة بتكون فيها متغير

1- $f_X(x) \geqslant 0$.

2- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

3- $\int_a^b f_X(x)\,dx = P(a \leq x \leq b)$.

$CDF \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} & x<0 \\ & 0\leq x<1 \\ & 1\leq x<2 \\ & 2\leq x<3 \\ & 3\leq x \end{cases}$

Menna Tullah Jayousi

* إذا السؤال كانت CDF ومعطيني ال $P(Y=-1)=0.5$.

$P(Y=-1)=P(Y\leq -1)-P(Y<-1)$.

$0.5 = \sigma - 0 \Rightarrow$ بطلع قيمة σ .

وإذا أعطاني ال $P(X>0)=0.5$.

$\hookrightarrow P(X>0)=1-\underline{P(X\leq 0)}$.

وبطلع هاي .

---

* إذا كانت السؤال CDF ⇐ وطلب أحوله ل PMF :

$P(Y=-1)=P(Y\leq -1)-P(Y<-1)$

$P(Y=3)=P(Y\leq 3)-P(Y<3)$.

$P(Y=5)=P(Y\leq 5)-P(Y<5)$.

⇒ بطلعهم من هون

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<-1\\ 0.5 & -1\leq y<3\\ 0.7 & 3\leq y<5\\ 1 & 5\leq y\end{cases}$$

بعدين بكتبه .

$$P(Y=y)=\begin{cases}0.5, & y=-1\\ 0.2, & y=3\\ 0.3, & y=5\\ 0, & o.w\end{cases}$$

---

* إذا كانت معطيني ال CDF وطلب $P(X=2)$ ⇐ $P(X=2)=P(X\leq 2)-P(X<2)$

---

* في ال pdf ⟵ إذا طلب ال $P(X\leq 1)$ بحل مثلاً الفترة بتبلش من 0 .

$\hookrightarrow \int_0^1$ الاقتران dx ⇒ وبطلع جوابه .

وإذا طلب ال $P(-1<X<0)$ ⇐ $\int_{-1}^{0}$ الاقتران dx .

إذا السؤال pdf وطلب $F_X(\frac{3}{2})$ ⇐ $P(X\leq \frac{3}{2})$.

$\hookrightarrow \int_0^{3/2}$ الاقتران dx.

بداية الاقتران

EXAMPLE:

A chance experiment consists of flipping a fair coin twice. The outcome of the coin is independent from trial to trial. The profit, X, is a random variable, that is related to the experiment outcome as follows:

X = 10 if no heads appear

X = 40 if one head appears

X = 100 if two heads appear

سؤال حلو (حسبت).

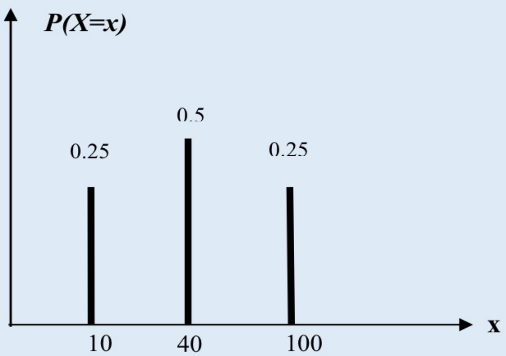
Find the probability mass function of X

SOLUTION

$$P(X=10)=P(TT)=P(T)P(T)=(0.5)(0.5)=0.25\,;$$

$$P(X=40)=P(HT)+P(TH)=2(0.5)(0.5)=0.5$$

$$P(X=100)=P(HH)=(0.5)(0.5)=0.25$$



Probability Mass Function

---

* Expected value / Mean $\Rightarrow \mu_X$ / $E[X]$.

1. Discrete $\Rightarrow \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\, P(X=x)$. $\Rightarrow$ PMF.
2. continuous $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$ $\Rightarrow$ Pdf.

Menna Tullah Jayousi

* variance ⇒ $\sigma_x^2 = E\left[(X-\mu_x)^2\right]$.

لـ أو أي اقترانه بوي ايام .

+ إذا أعطاني ال pdf وطلب ال $E[X^2]$ ⇐

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f_X(x) \, dx$$

بعوض هون الاقترانه . الموجود في الفترة في الـ pdf .

إذا طلب ال $E[X]$ نفس الاشي بس بعوض ← ونكامل .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx \Rightarrow$$

إذا طلب ال σ_x^2 لل X ⇐

$\sigma_x^2 = E\left[(X-\mu_x)^2\right]$.

حسب شو بده هونه . طلعها

الجواب اللي نطلع هونه يروح بعوضه بالقانونه ←

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{الجواب} \; f_X(x) \; dx$$

الاقترانه الي بالسؤال .

---

*إذا أعطاني PMF وبده $\mu_x[X]$ ⇐

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x \, P(X=x).$$

ونمشي ع رقم رقم موجود بالفترات اللي عندي .

σ_x^2 ⇐ $E\left[(X-\mu_x)^2\right]$ بطلع الجواب برد برجع ع قانونه ال E .

Menna Tullah Jayousi

Note:-

1) $E[ax] = \int_{-\infty}^{\infty} a x f_X(x)\, dx = aE[x]$.

2) $E[ax+b] = aE[x]+b$.

3) $E\{x^2\} \neq \{E\{x\}\}^2$.

4) $\sigma_X^2 = E(x^2) - \mu_X^2$.

* Mode $\Rightarrow$ pdf $\Rightarrow \frac{d f_X(x)}{dx} = 0 \Rightarrow$ إذا طلعت المشتقة تساوي رقم.

$\frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$

استقصاي.

إذا بروح ع نقاط الفترات في السؤال بعوضهم بال function أكبر قيمة هي ال mode.

* Mediane $\Rightarrow$ pdf $\Rightarrow \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x) = \frac{1}{2}$.

---

* Common Distribution:-

1) Binomial Distribution:-

1) التجربة تعاد . for n times

2) أنها تخرج فقط fail & success

3) trials are independent

4) P(S) and P(F) do not change over trials.

5) X = number of success in the n trials.

6) $P(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p(s)^x [1-p(s)]^{n-x}, & x = 0,1,2,\dots,n. \\ 0 & o.w. \end{cases}$

7) $\mu_X = np(s)$.

8) $\sigma_X^2 = np(s)[1-p(s)]$.

Menna Tullah Jayousi

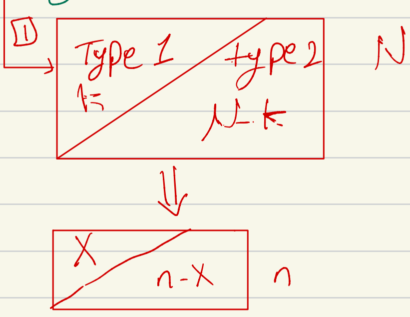
2) Geometric Distribution:-

1) Experement repeated.
2) two outcomes.
3) Independent.
4) $p(s)$ and $p(f)$ do not change.
5) X = number of trials to the first success.
6) $$P(X=x) = \begin{cases} p(f)^{x-1}\, p(s), & x = 1, 2, \ldots, n. \\ 0, & o.w \end{cases}$$
7) $$\mu_X = \frac{1}{P(s)}.$$
8) $$\sigma_X^2 = \frac{1-P(s)}{(P(s))^2}.$$

---

3) Hyper-geometric Distribution:-

1)



$x \Rightarrow$ number of items from type 1.

2) $$P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = 0, 1, 2, \ldots, m, \; n\ (n,k). \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

3) Note $\Rightarrow$ $\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = \frac{1}{0!} = 1.$

4) $\mu_X = n\,p(s).$

5) $\sigma_X^2 = n\,p(s)\,(1-p(s))\left(\frac{N-n}{N-1}\right).$

4 Poisson Distribution :-

→ $b = \lambda T$

→ $P(X=x) = e^{-b} \frac{b^x}{x!}$

→ $\mu_x = b = E[x]$

→ $\sigma_x^2 = b = var[x]$

⟹ $X(0) = 0$ ⟹ we begin the counting at time $t = 0$.

5 uniform distribution : $[a, b]$

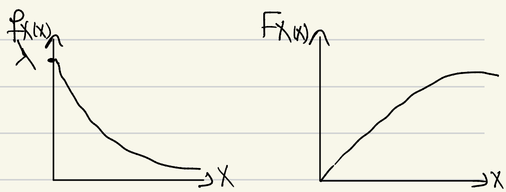
→ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ⟹ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , o.w \end{cases}$

⟹ $\mu_x = \frac{a+b}{2}$, ⟹ $var = \frac{(b-a)^2}{12}$

6 Exponential Random variable:-

→ pdf ⟹ $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , o.w \end{cases}$

→ $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , o.w \end{cases}$

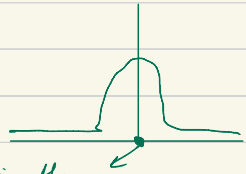


→ $\mu_x = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

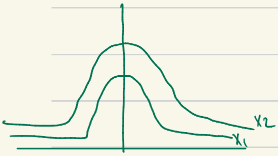
→ $E[x^2] = \frac{2}{\lambda}$

$\boxed{7}$ Gaussian (Normal) Distributing ⇒ التوزيع الطبيعي

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

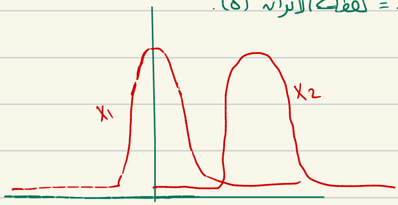


(0) نقطة الاتزان $= \mu_x$



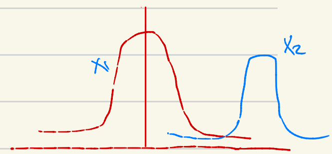
$\mu_{x1} = \mu_{x2}$

$\sigma_{x1} > \sigma_{x2}$



$\mu_{x1} \neq \mu_{x2}$

$\sigma_1 = \sigma_2$



$\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow \mu_1 < \mu_2$

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$

⇐ بستعمل الجدول الكبير إذا الـ mean $=0$ ، variance $=1$

$\Rightarrow P(X \leq 1.12) \Rightarrow \underset{\text{معطى}}{\underline{\mu = 0,\ \sigma_x^2 = 1}}$

إذاً ⇓

$\phi(1.12) =$ من الجدول مباشرة

$\Rightarrow \phi(-a) = 1 - \phi(a)$

$\Rightarrow P(x \geq 3.12) = 1 - P(X < 3.12)$

⇐ إذا الـ mean $\neq 0$ ، variance $\neq 1$ ⇐

$\phi\left(\frac{\text{الرقم} - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2}}\right)$

$\hookrightarrow P(X \leq -4) = \phi\left(\frac{-4-2}{4}\right) = \phi(-1.5) = 1 - \phi(1.5)$ من الجدول

$\Rightarrow P(2.3 \leq X \leq 5.3) = P(X \leq 5.3) - P(2.3)$

Menna Tullah Jayousi

$\Rightarrow$ Transformation of R.V:-

1 Discrete

1 إذا أعطاني الاقتران X لأحد الأنواع السابقة وطلب ال PMF للاقتران Y

مثلاً $\Rightarrow Y = X^2 - 1$

X	$P(X=x)$	$Y = X^2 - 1$	$P(Y=y)$
0	a	$0-1 = -1$	a
1	b	$1-1 = 0$	b
2	c	$4-1 = 3$	c
3	d	$9-1 = 8$	d

الجواب $\Rightarrow$ $P(Y=y) = \begin{cases} a, & y=-1 \\ b, & y=0 \\ c, & y=3 \\ d, & y=8 \\ 0, & o.w \end{cases}$

لما دام جدول الجهم صورة وحدة الأرقام مختلفة $\Rightarrow$ نحط احتمالية قيم Y نفس احتمالية قيم X.

2 إذا أعطاني ال PMF جاهز وبدو ال $Y = X^2 \Rightarrow$ نفس الشي افرقة بسيطة

X	$P(X=x)$	$Y = X^2$	$P(Y=y)$
-2	$a = \frac{1}{6}$	4	
0	b	0	b
2	$c = \frac{1}{6}$	4	

بالتالي $\Rightarrow$ $P(Y=y) = \begin{cases} b, & y=0 \\ \frac{2}{6}, & y=4 \\ 0, & o.w \end{cases}$

لـ احتمالية الأربعة تكون حاصل جمع $\frac{2}{6} = a + c$

Menna Tullah Jayousi

$\boxed{2}$ continuous:-

$X \longrightarrow Y = g(x)$

$\Downarrow$

$f(x)$ known

$\Downarrow$

$$f(y) = \frac{f(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}$$

$\Rightarrow$ شروط $\boxed{1}$ $\frac{dy}{dx} \neq 0$ $\boxed{2}$ monotonically increasing
monotonically decreasing.

$\boxed{1}$ نطلع ال $f(x)$ حسب النوع الي عندي.

$\boxed{2}$ نحاول أرسمه للاقتران $Y \Leftarrow$ نتأكد كل عنصر اله صورة واحدة.

$\boxed{3}$ بوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$

$\boxed{4}$ $f_y = \frac{f_x}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}$

$\boxed{5}$ بس أجي اكتب ال $— \leq y \leq —$ ، الأرقام بتتغير عن ال X و $f_y(y)$

س.ع ، ٥

لـ أرقام ال X بعوضهم باقتران ال y.

$\boxed{6}$ إذا كان في Y في عنصرين الهم نفس الصورة مثل $Y = X^2$

لـ $\boxed{1}$ برسمه . $\boxed{2}$ بغير حدود الاكس بإني أعوضهم بالاقتران Y-

$-2 \leq x \leq 2$ لـ الرقم السالب بنلغيه

$0 \leq y \leq 4$

$\boxed{3}$ نشتق الاقتران y $\frac{dy}{dx}$.

$\boxed{4}$ بروح ع القانون $\Leftarrow$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}$$

$y = x^2$

$x = \mp\sqrt{y}$

بعوض منهم كلهن $\Rightarrow f_y(y) = \frac{f_X(x)}{|2x|} + \frac{f_X(x)}{|2x|}$

$\sqrt{y}$ $\sqrt{y}$

لأنه في قيمة مطلقة.

Menna Tullah Jayousi

Chapter $\boxed{3}$:-

$\Rightarrow$ Discrete $\Rightarrow$ The joint PMF $\Rightarrow$ $PMF_X, PMF_Y = P(X=x, Y=y)$

ل تقاطع $\boxed{1}$ يا بعبر عنه بجدول أو $\boxed{2}$ فنكشن . $\boxed{3}$ بالرسم .

$\Rightarrow F_{X,Y}(2,2) =$ joint CDF of X and Y

$\hookrightarrow P(X \leq 2, Y \leq 2)$

$\Rightarrow P(X=1) \Rightarrow X=1$, $Y =$ أي قيمة

⇐ كيف نطلع ال PMF لل X وال Y لكل واحد لحال :-

$P(X=1) =$

$P(X=2) =$

$\vdots$

وهكذا .

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.2, & x=1 \\ 0.6, & x=2 \\ 0.2, & x=3 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

ل مجموعهم بساوي واحد ونفس الاشي لل Y

⇐ إذا طلب μ_X

$\Rightarrow E[X] = (1)(0.2) + (2)(0.6) + (3)(0.2)$

$\hookrightarrow \sum x\, P(X=x)$.

$\hookrightarrow \sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$

$\hookrightarrow \sum x^2\, P(X=x)$.

$\Rightarrow$ Are X and Y independent?

$\hookrightarrow P(X=x, Y=y) \overset{??}{=} P(X=x)\,P(Y=y)$

بنلبش بوحدة وحدة $P(X=1, Y=1) \overset{??}{=} P(X=1)\,P(Y=1)$

ل نفحصهم كلهم إذا واحد اختل الشرط

يعني Not independent .

$\Rightarrow F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$.

$\Rightarrow F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$.

$\Rightarrow F_{X,Y}(-\infty, \infty) = 0$.

$\Rightarrow F_{X,Y}(\infty, -\infty) = 0$.

Menna Tullah Jayousi

$\Rightarrow$ correlation coeffient:- معامل الارتباط = هل يوجد بينهم علاقة أولا.

$\hookrightarrow$ ١- إذا كان يساوي صفر $\Leftarrow$ يعني uncorrelated فش ارتباط.

$\hookrightarrow$ ٢- إذا كان يساوي $\mp 1 \Leftarrow$ correlated fully في ارتباط.

$$\Rightarrow \rho_{xy} = \frac{E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E[XY] - \mu_X \mu_y}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$E[XY] = \sum XY \, P(X=x, Y=y)$$

$\Leftarrow$ إذا كانوا dependent هذا لا يعني إنهم لازم يكونوا uncorrelated ممكن يكونوا correlated.

$\Leftarrow$ إذا كانوا independent حتما لازم يكونوا uncorrelated.

$\Rightarrow$ covariance $(\mu_{xy}) = E[XY] - \mu_x \mu_y$

$\hookrightarrow -1 \leqslant \rho_{xy} \leqslant 1$ $\quad$ $\hookrightarrow \mu_x \mu_y = \rho_{xy} \, \sigma_x \sigma_y$

$\Rightarrow E[XY] = E[X]\,E[Y]$ $\quad$ إذا كانوا independent

$\Rightarrow PMF_X, PMF_Y$ يعني أوجد $\Leftarrow$ margian Probability Mass Function.

$\Rightarrow E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$

$\hookleftarrow$ دائما valid.

Menna Tullah Jayousi

$\Rightarrow Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$

↳ $E[Y] = a_1 \mu_{X_1} + a_2 \mu_{X_2}$

↳ $\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + a_2^2 \sigma_{X_2}^2 + \boxed{2 a_1 a_2 \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \rho_{X_1 X_2}}$

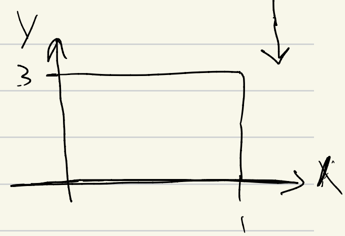
إذا كانت X_1, X_2 independent يعني $\rho_{X_1X_2} = 0$ هاي الجزئية بتصير صفر.

$\Rightarrow$ Joint pdf (continuous):-

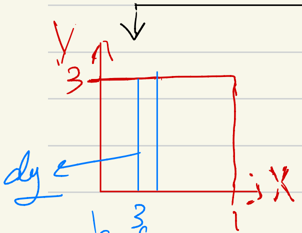
↳ $f_{X,Y} = \begin{cases} k, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$

اذا لقينا القاعدة،

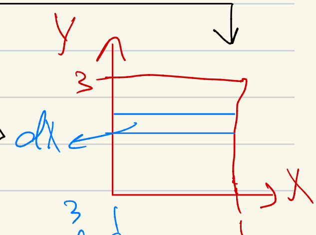
التكامل لازم يساوي واحد



مثلاً، أوجد k عندي طريقتين



يعطوا نفس الجواب



$\int_0^1 \int_0^3 k\, dy\, dx$

$\int_0^3 \int_0^1 k\, dx\, dy$

Menna Tullah Jayousi

$\Rightarrow$ The marginal pdf of $X \Rightarrow f_X(x)$

$\Rightarrow$ The marginal pdf of $Y \Rightarrow f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

$\Downarrow$

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq 3 \Rightarrow$ إذا الحدود تكون العكس يعني حدود y.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

$0 < x < 1$

$\Rightarrow$ Are X and Y statistically independent?

$\hookrightarrow f_{X,Y}(x,y) \overset{??}{=} f_X(x)\, f_Y(y)$.

$P(Y \leq 1 / X = 0.5)$

إذا كان عندي رقم عند نقطة تكون كثير المتغير فبروح على الثاني اسمه

conditional pdf

conditional pdf of y

$\Downarrow$

$$f_{Y/X}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(y)}$$

conditional pdf of X

$\Downarrow$

$$f_{X/Y} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

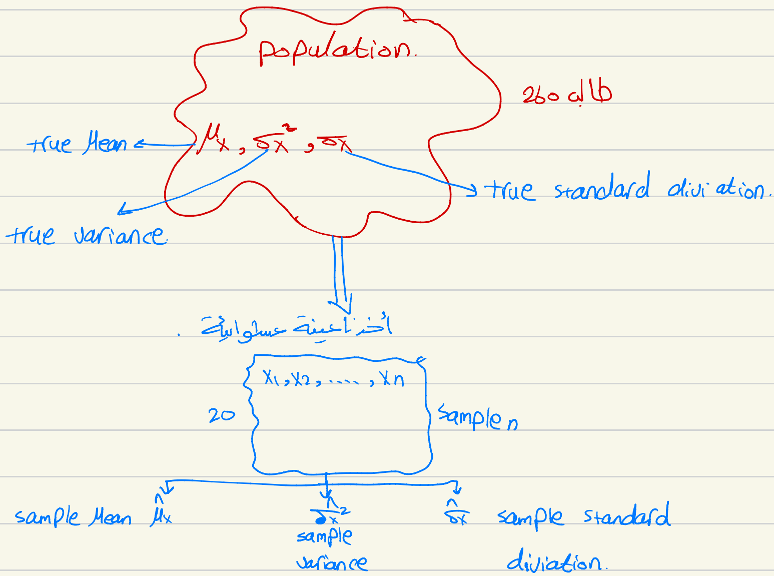
$\Rightarrow 0 < y < x < 2 \Rightarrow$ $\boxed{1}$ $0 < y < 2$

$\boxed{2}$ $0 < x < 2$

$\boxed{3}$ $y < x$

Menna Tullah Jayousi

⇒ Basics Definitions and Terminology:-



sample covariance. $\Leftarrow \hat{\mu}_{xy}$ هسة إذا كان عندي $X, Y \Leftarrow$ بيصير عندي كمان

sample correlation coeffient. $\Leftarrow \hat{\rho}_{xy}$

$$* \hat{\mu}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\hat{\sigma}_x^2$

true mean known $\Downarrow$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu_x)^2$$

true mean known $\Downarrow$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \hat{\mu}_x)^2$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2}$$

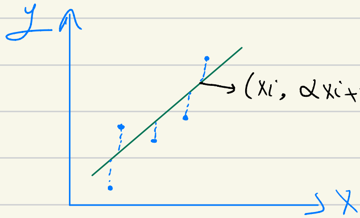
$$\Rightarrow \hat{\mu}_{xy} = C_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}_x)(y - \hat{\mu}_y)$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_{x,y} = r_{x,y} = \frac{\hat{\mu}_{xy}}{\hat{\sigma}_x \, \hat{\sigma}_y}$$

Menna Tullah Jayousi

Regression Techniques:-

- Method of last square (LSM)
- least mean squars method (LMSM).



$$Error = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (\alpha x_i + B) \right]^2$$

$\Rightarrow \frac{d\varepsilon}{d\alpha}, \frac{d\varepsilon}{dB}$ بشتق بالنسبة للمتغيرات

حل المعادلة الخطية

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = \frac{C_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2} = \frac{\hat{\mu}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2}$, $B = \hat{\mu}_y = \alpha \hat{\mu}_x$

$\Rightarrow$ polynomial لما يكون $\Rightarrow$

$\hookrightarrow B_1 + B_2 x_i + B_3 x_i^2$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ $y = a e^{bx} \Rightarrow$ Linear form. بنحولها لـ

$\ln y = \ln a + bx$

$y' = B' + \alpha' x'$

$\boxed{2}$ $y = a x^b$

$\ln y = \ln a + b \ln x$.

$y' = B' + \alpha' x'$.

$\boxed{3}$ $y = 1 - e^{\frac{-x^b}{a}}$

$$e^{\frac{-x^b}{a}} = 1 - y \Rightarrow e^{\frac{x^b}{a}} = \frac{1}{1-y}$$

$$\frac{x^b}{a} = \ln\left(\frac{1}{1-y}\right) \Rightarrow x^b = a \ln\left(\frac{1}{1-y}\right)$$

$$b \ln x = \ln a + \ln \ln\left(\frac{1}{1-y}\right).$$

$$\ln \ln\left(\frac{1}{1-y}\right) = b \ln x - \ln a$$

$$y' = \alpha' x' - B'$$

$B' = -\ln a.$

$\boxed{4}$ $\dfrac{L \rightarrow \text{constant}}{1 + e^{a+bx}} = y$

$$L = y + y e^{a+bx} \Rightarrow \frac{L-y}{y} = e^{a+bx}$$

$$\ln\left(\frac{L-y}{y}\right) = a + bx$$

$$y' = B' + \alpha' x'$$

$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2$

= دائماً

بتطلع

Gaussian.

$\rightarrow \mu_Y = C_1 \mu_{X_1} + C_2 \mu_{X_2}$

$$\sigma_y^2 = C_1^2 \sigma_{x_1}^2 + C_2^2 \sigma_{x_2}^2 + \boxed{2 c_1 c_2 \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \rho_{x_1 x_2}}$$

if x_1, x_2 independent $\boxed{0}$

Menna Tullah Jayousi

Population. → μ_x , σ_x^2 (known)

→ unknown (calculate)

→ pdf | نعوض الأنواع السابقة. | PMF.

sample ⇓

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n

① مثال: كوكتيل

$Y = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$

⇓ دائماً Gaussian

$E[Y] = E[x_1] + E[x_2] + \cdots + E[x_n]$.

$E[Y] = n\,\mu_x$

$\sigma_Y^2 = n\,\sigma_x^2$

$\sigma_Y = \sqrt{n}\,\sqrt{\sigma_x^2}$

if it was not standard

$$\phi\left(\frac{\text{value} - \mu_y}{\sigma_y}\right)$$

② $Y = \hat{\mu}$ = sample mean ← avg لكل التجارب.

⇓

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} x_i$$

دائماً Gaussian

⇓

① $E[\hat{\mu}] = \mu_x$.

② $\sigma_{\hat{\mu}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$

③ $\sigma_{\hat{\mu}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

Menna Tullah Jayousi