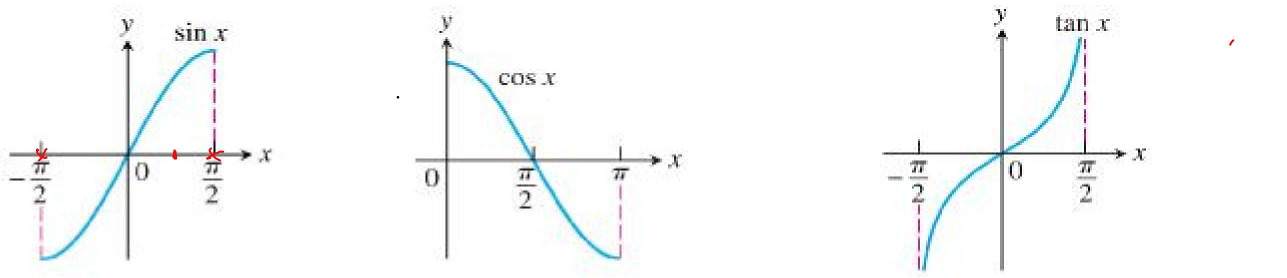
# 7.6 Inverse Trigonometric Functions

Note Title ٢٣/٠٣/٢٧

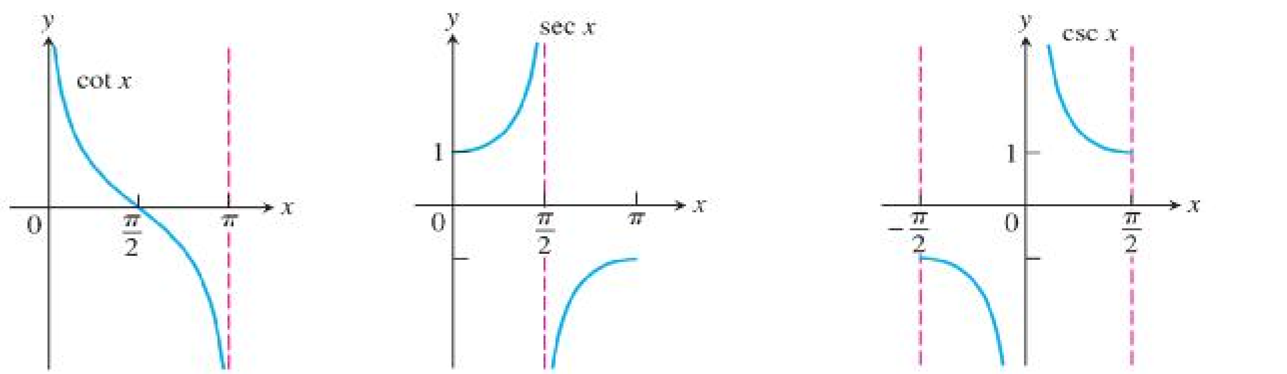
**مقدمة:** الدوال المثلثية دوال ليست 1-1 على مجالها لوجود تكرار دوري للقيم، لكن يمكن تحديد مجال كل دالة لتكون 1-1، ومن ثم تعريف دالة عكسية لها. مثال ذلك، $y = \cos x$ ليست 1-1 على $\mathbb{R}$ لأن $\cos 0 = \cos 2\pi$، في المقابل هي نفرض دالة 1-1 على المجال $[0, \pi]$ بمدى $[-1, 1]$. الرسومات التالية توضح كيفية التحديد مجال الدوال المثلثية الستة لتكون 1-1، ومن ثم نعرف عليها المعكوس.




$y = \sin x$
Domain: $[-\pi/2, \pi/2]$
Range: $[-1, 1]$

$y = \cos x$
Domain: $[0, \pi]$
Range: $[-1, 1]$

$y = \tan x$
Domain: $(-\pi/2, \pi/2)$
Range: $(-\infty, \infty)$




$y = \cot x$
Domain: $(0, \pi)$
Range: $(-\infty, \infty)$

$y = \sec x$
Domain: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$y = \csc x$
Domain: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$
Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

**Defs:** 1) The inverse sine fun – denoted by $\sin^{-1} x$ or arcsine $x$ – is defined as follows:

$$\forall x \in [-1, 1], \quad y = \sin^{-1} x \quad \text{iff} \quad \sin y = x, \quad y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

2) The inverse cosine fun – denoted by $\cos^{-1} x$ or $\arccos x$ – is defined as follows:

$$\forall x \in [-1, 1], \quad y = \cos^{-1} x \quad \text{iff} \quad \cos y = x, \quad y \in [0, \pi].$$

3) $\forall x \in (-\infty, \infty)$, $y = \tan^{-1} x$ iff $\tan y = x$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ !

4) $\forall x \in (-\infty, \infty)$, $y = \cot^{-1} x$ iff $\tan y = x$, $y \in (0, \pi)$

5) $\forall |x| \geq 1$, $y = \sec^{-1} x$ iff $\sec y = x$, $y \in (0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$

6) $\forall |x| \geq 1$, $y = \csc^{-1} x$ iff $\csc y = x$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$

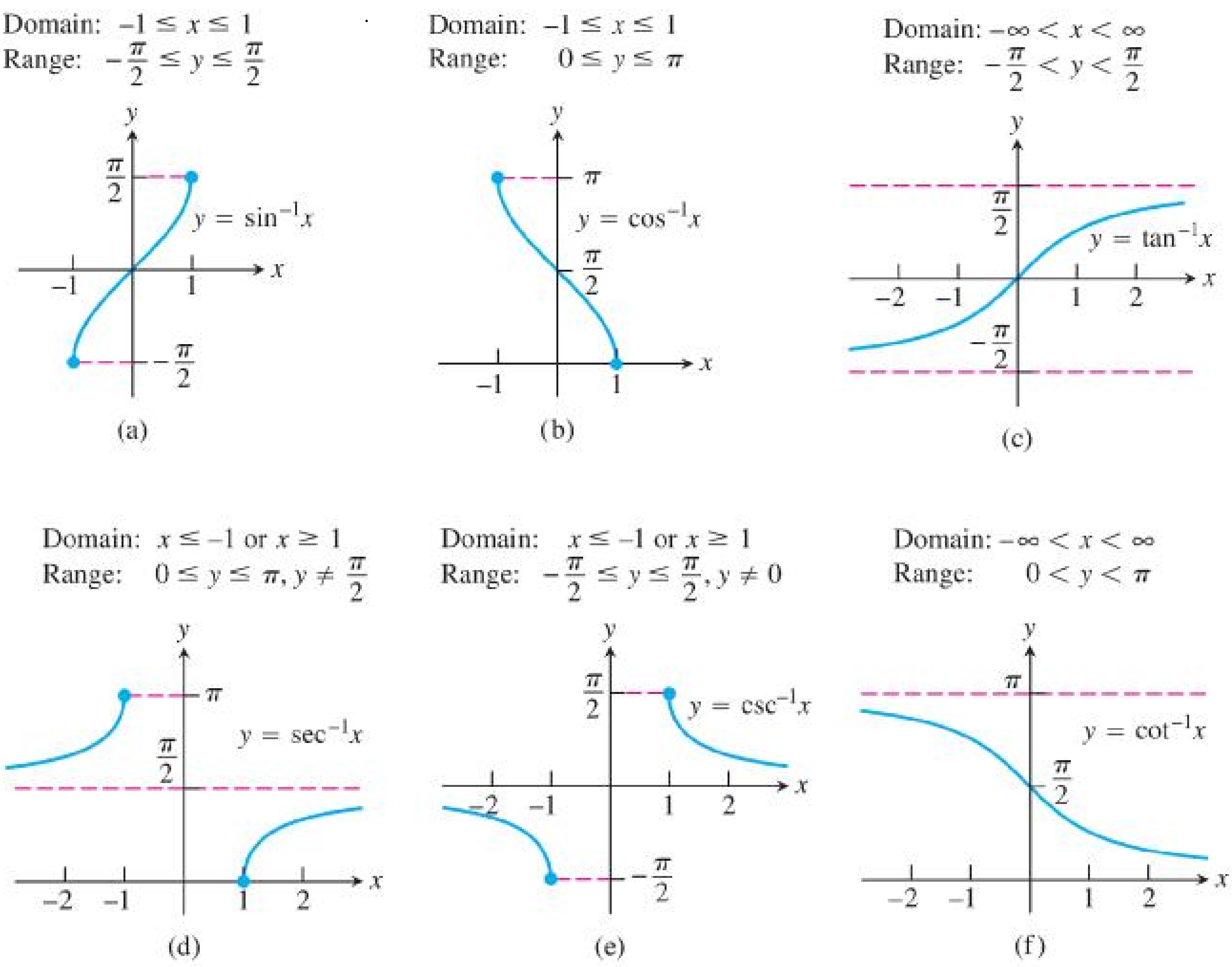



**Illustration:** $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ since $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

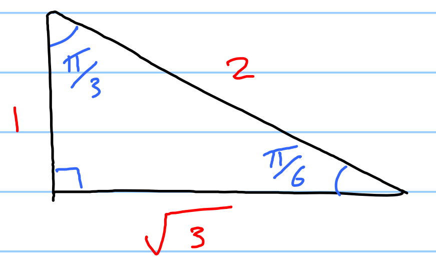
**ملحوظة:** لاحظ أنه جميع الدوال المثلثية العكسية كزوايا تكون إما من الربع "الأول أو الثاني" أو "الأول أو الرابع"

الجدول التالي يوضح التعريفات السابقة للدوال المثلثية العكسية.

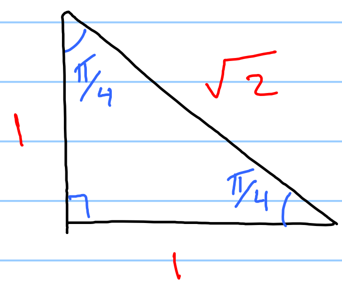
 

| | Function | Domain | Range | Illustration |
|---|---|---|---|---|
| 1- | $y=\sin^{-1}x$ | $x\in[-1,1]$ | $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ | $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$<br>$\sin^{-1}(\sin\frac{-\pi}{4})=\frac{-\pi}{4}$<br>$\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{4})\neq\frac{3\pi}{4}$ |
| 2- | $y=\cos^{-1}x$ | $x\in[-1,1]$ | $y\in[0,\pi]$ | $\cos(\cos^{-1}\frac{-1}{2})=\frac{-1}{2}$<br>$\cos^{-1}(\cos\frac{3\pi}{4})=\frac{3\pi}{4}$<br>$\cos^{-1}(\cos\frac{-\pi}{4})\neq\frac{-\pi}{4}$ |
| 3- | $y=\tan^{-1}x$ | $x\in(-\infty,\infty)$ | $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ | $\forall x\in\mathbb{R},\ \tan(\tan^{-1}x)=x$<br>$\tan^{-1}(\tan\frac{-\pi}{6})=\frac{-\pi}{6}$<br>$\tan^{-1}(\tan\frac{2\pi}{3})\neq\frac{2\pi}{3}$ |
| 4- | $y=\sec^{-1}x$ | $\lvert x\rvert\geq 1$<br>$[x\notin(-1,1)]$ | $y\in[0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}$ | |
| 5- | $y=\csc^{-1}x$ | $\lvert x\rvert\geq 1$ | $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}$ | |
| 6- | $y=\cot^{-1}x$ | $x\in(-\infty,\infty)$ | $y\in(0,\pi)$ | |

مثلثات خاصة




مثلث ثلاثيني ستيني




مثلث متساوي الساقين

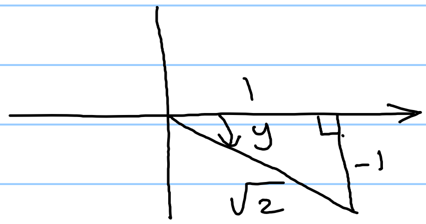
## Examples:

1) Find the value of $y$ for the following:

a) $y = \sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

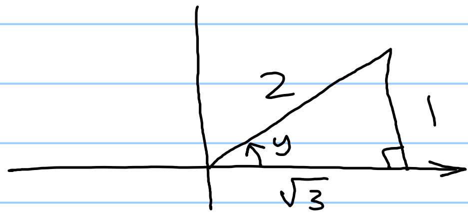
بداية ، ولجميع الدوال المثلثية العكسية ، فإنه فيتمثل عند النقاط الموجبة دائماً في الربع الأول كزاوية ، ويتمثل عند النقاط السالبة تكون من الربع الآخر (أما الرابع أو الثاني حسب الدالة العكسية) .

في هذا السؤال ، من المعلوم أن $y = \sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ كزاوية هي إما في الربع الأول أو الربع الرابع ، ولأن $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ هي سالبة ، لذا ستكون في الربع الرابع حيث $\sin y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$




$\therefore \boxed{y = -\pi/4}$

b) $y = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

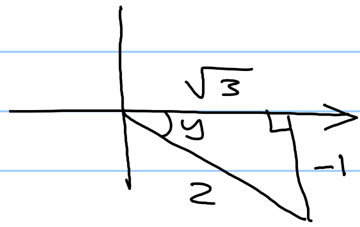



sol: $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $y \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \boxed{y = \pi/6}$

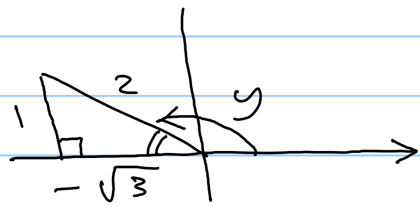
c) $y = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

sol: $\tan y = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ , $y \in (-\pi/2, \pi/2)$




$\therefore \boxed{y = -\pi/6}$

d) $y = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$



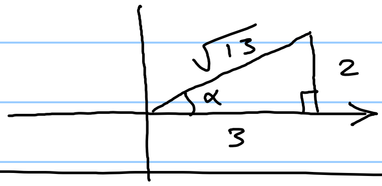

sol: $\cos y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ , $y \in [0, \pi]$

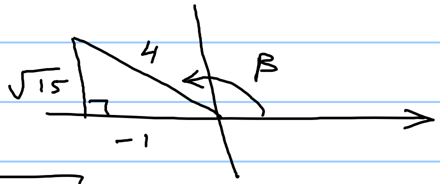
$\Rightarrow \boxed{y = \frac{5\pi}{6}}$

## 2) Find the exact value of

$$\sec\left(\tan^{-1}\tfrac{2}{3}\right) + \sin\left(\cos^{-1}\tfrac{-1}{4}\right)$$

Sol: Set $\alpha = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ and $\beta = \cos^{-1}\frac{-1}{4}$, so we have
$\tan\alpha = \frac{2}{3}$ and $\cos\beta = \frac{-1}{4}$



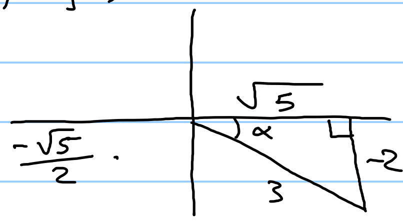

$\therefore \boxed{\sec\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{\sqrt{15}}{4}}$

## 3) If $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)$, find $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, ...

Sol: $\sin\alpha = \frac{-2}{3}$ and $\alpha \in [-\pi/2, 0]$, so

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$,

$\sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\csc\alpha = \frac{-3}{2}$, and $\cot\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{2}$.




## The Relations Between Inverse Trig. funs

1- $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

2- $\csc^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

3- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$ (odd fun)

4- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$ (odd fun)

5- $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$ $\left(\cos^{-1}x + \cos^{-1}-x = \pi\right)$

6- $\cos^{-1}(x) = \pi/2 - \sin^{-1}x$

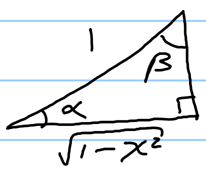
7- $\cot^{-1}x = \pi/2 - \tan^{-1}x$

8- $\csc^{-1}x = \pi/2 - \sec^{-1}x$

**PF:** 1) Let $\alpha = \sec^{-1}x \Rightarrow \sec\alpha = x \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{x}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

6) تمرين $\left.\begin{array}{l}\alpha = \sin^{-1}x \\ \beta = \cos^{-1}x\end{array}\right\} \Rightarrow$




$\Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = \pi/2}$

ملحوظة : باستخدام المتطابقة (4) / (7) / لاحظ ما يلي :

$$\cot^{-1}(-x) \overset{3}{=} \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(-x) \overset{5}{=} \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} x$$

**Examples:**

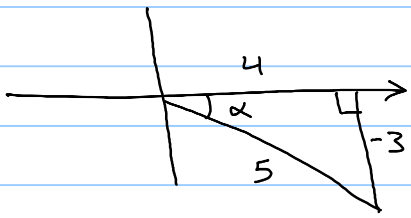
1) Find the value of $\tan(\sec^{-1} 1)$

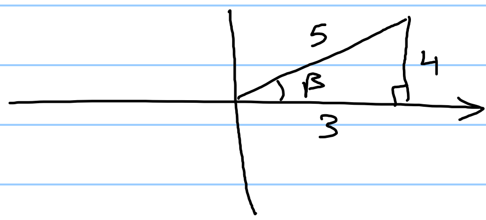
Sol: $\alpha = \sec^{-1} 1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 0$

$\therefore \tan\alpha = \tan 0 = \boxed{0}$

2) $\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) - \sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$

sol: Set $\alpha = \tan^{-1}\frac{-3}{4}$ , $\beta = \sin^{-1}\frac{4}{5}$ , so



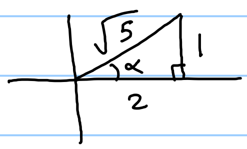



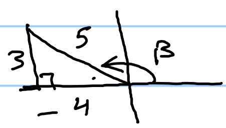

$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + \left(\frac{-3}{5}\right)\cdot\frac{4}{5} = \boxed{0}$

3) $\csc\left(\tan^{-1}\frac{1}{2} - \cos^{-1}\frac{-4}{5}\right)$

sol: Set $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ , $\beta = \cos^{-1}\frac{-4}{5}$




نقوم أولاً بحساب $\sin(\alpha-\beta)$ ثم نعكس الإجابة للحصول على $\csc(\alpha-\beta)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{-4}{5} - \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{-10}{5\sqrt5} = \frac{-2}{\sqrt5}$

$\therefore \csc(\alpha-\beta) = \boxed{\frac{-\sqrt5}{2}}$

4) Find the value of $\sec^{-1}\left(\sec\frac{-\pi}{6}\right)$

Sol: Firstly, $\sec^{-1}\left(\sec\frac{-\pi}{6}\right) \neq \frac{-\pi}{6}$ since $\frac{-\pi}{6} \notin [0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$

Note that $\sec x$ is even, so $\sec(-\pi/6) = \sec \pi/6$

so

$$\sec^{-1}(\sec -\pi/6) = \sec^{-1}(\sec \pi/6) = \pi/6$$

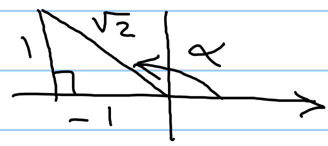
المساواة الأخيرة حدثت لأنه $\pi/6$ تنتمي لمدى الدالة $\sec^{-1} x$ .

5) $\cot^{-1}(\cot -\pi/4) = \alpha$

<u>sol:</u> $\cot -\pi/4 = -1$ (Do it).

so $\cot^{-1}(\cot -\pi/4) = \cot^{-1}(-1) = \alpha \in (0, \pi)$

$\therefore \cot\alpha = -1$




$\therefore$ $\boxed{\alpha = \frac{3\pi}{4}}$

# Derivatives of Inverse Trig. funs and Integration.

**Thrm:**

1) $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , $|x| < 1$

2) $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ , $|x| < 1$

3) $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$ ,

4) $\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$ ,

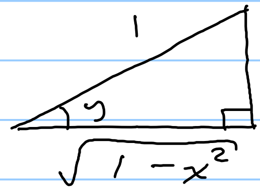
5) $\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ , $|x| > 1$

6) $\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ , $|x| > 1$

**PF:** 1) Let $y = \sin^{-1} x$, so $\sin y = x$

$\Rightarrow \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$




3) بالمثل من 1

5) $y = \sec^{-1} x \Rightarrow \sec y = x$

$\Rightarrow \sec y \cdot \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y}$ ....... $(*)$

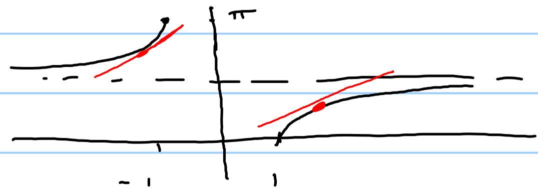
But $\sec y = x$ and $\tan^2 y = \sec^2 y - 1 = x^2 - 1$

$\therefore \tan y = \mp \sqrt{x^2-1}$

عوض في $(*)$

$\therefore \frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{\mp 1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

لاحظ أن مماسات $y = \sec^{-1} x$ دائماً ذات ميل موجب ، لذا




$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1 \\ \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

اثبات النقاط (2) ، (4) ، (6) يأتي بسهولة من العلاقات

$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$, $\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$, $\csc^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$

ملحوظة: نستخدم قانون السلسلة لتعميم القوانين السابقة:

1. $$\frac{d(\sin^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},\quad |u|<1$$

2. $$\frac{d(\cos^{-1}u)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},\quad |u|<1$$

3. $$\frac{d(\tan^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

4. $$\frac{d(\cot^{-1}u)}{dx}=-\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

5. $$\frac{d(\sec^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},\quad |u|>1$$

6. $$\frac{d(\csc^{-1}u)}{dx}=-\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},\quad |u|>1$$

Examples: Find $\frac{dy}{dx}$ if

1) $y=\sin^{-1}x^2$

sol: $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}*2x=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

2) $y=\tan^{-1}\sqrt{x^2+1}$.

$$y'=\frac{1}{1+(\sqrt{x^2+1})^2}*\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}*2x=\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{x^2+1}}$$

3) $y=\csc^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$

$$y'=\frac{-1}{\left|\frac{3}{x}\right|\sqrt{\left(\frac{3}{x}\right)^2-1}}*\frac{-3}{x^2}=\frac{1}{|x|\sqrt{\frac{9}{x^2}-1}}=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

ملحوظة: يمكن حل المثال السابق بملاحظة العلاقة $\csc^{-1}\frac{3}{x}=\sin^{-1}\frac{x}{3}$.

# Integration Formulas:

من قوانين الإشتقاق السابقة يمكن استنتاج التكاملات التالية :

1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Valid for $u^2 < a^2$)

2. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Valid for all $u$)

3. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$ (Valid for $|u| > a > 0$)

ملحوظة : لاحظ أن $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ / وبالتالي يمكن

حساب التكامل $\int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ / ولكن الأفضل إخراج

ا- خارج التكامل كالتالي

$$\int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

مع الأخذ بعين الإعتبار صحة كلا الجوابين لوجود العلاقة :

$$\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$$

# Examples:

1) $\int \frac{dx}{10 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right) + C$

2) $\int_{-2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}|x| \Big]_{-2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \sec^{-1}\sqrt{2} - \sec^{-1}\left|\frac{-2}{\sqrt{3}}\right|$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

Sol: لحل هذا السؤال يجب بداية إكمال المربع :

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$
$$= -\left((x-2)^2 - 4\right) = 4 - (x-2)^2$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}}$$

$u = x - 2$
$du = dx$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$
$$= \boxed{\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C}$$

4) $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2}$

Sol: Complete a square:

$$4x^2 + 4x + 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 2$$
$$= 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 2 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 2$$
$$= (2x+1)^2 + 1$$

[ طريقة إكمال المربع للصيغة $x^2 + bx$ هي بإضافة $(\frac{1}{2}b)^2$ مربع نصف معامل $x$ ثم طرحه وبالتالي يكون المقدار
$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$ ]

$$\therefore \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 1}$$

$u = 2x + 1$
$du = 2dx$
$\frac{1}{2} du = dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} u + C$$
$$= \boxed{\frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) + C}$$

5) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-5}} = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x^2-5/4}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5/4}}\cdot \sec^{-1}\left|\frac{x}{\sqrt{5/4}}\right| + C \qquad \left(a=\sqrt{5/4}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \sec^{-1}\left|\frac{2x}{\sqrt{5}}\right| + C}$$

لاحظ أنه يمكن حل المثال ⑤ بأخذ $u=2x$ ثم $du=2dx$ وتحويل التكامل باستخدام التعويض البسيط وفي النهاية نحصل على نفس الجواب والصيغة.

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^x\sqrt{e^{2x}-6}} \qquad \begin{aligned} u &= e^x \\ du &= e^x dx \end{aligned}$$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left|\frac{u}{\sqrt{6}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left|\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right| + C = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C}$$

موجبة دائماً.

7) $$\int \frac{dy}{\tan^{-1}y\,(1+y^2)} \qquad \begin{aligned} u &= \tan^{-1}y \\ du &= \frac{dy}{1+y^2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \boxed{\ln|\tan^{-1}y| + C}$$