10.5 The ratio and Root tests

Note Title ٢١/٠٥/٢٣

THEOREM 12—The Ratio Test Let $\sum a_n$ be a series with positive terms and suppose that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

Then **(a)** the series *converges* if $\rho < 1$, **(b)** the series *diverges* if $\rho > 1$ or ρ is infinite, **(c)** the test is *inconclusive* if $\rho = 1$.

ملحوظة: عندما يعتمد الحد النوني للمتسلسلة على n! مضروب n فإنه يفضل إستخدام إختبار النسبة بشرط $\rho \neq 1$.

THEOREM 13—The Root Test Let $\sum a_n$ be a series with $a_n \geq 0$ for $n \geq N$, and suppose that

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

Then **(a)** the series *converges* if $\rho < 1$, **(b)** the series *diverges* if $\rho > 1$ or ρ is infinite, **(c)** the test is *inconclusive* if $\rho = 1$.

يفضل إستخدام هذا الإختبار عندما يكون هناك صعوبة في حساب نهاية الجذر النوني للحد a_n وقد تكون النتيجة 1.

ملحوظة: عندما تكون $\rho = 1$ في إختباري النسبة والجذر النوني فإن المتسلسلة قد تكون تقاربية وقد تكون تباعدية ! ولتوضيح ذلك ! ادرس المثال التالي:

Illustration: Ratio test:

For the series $\sum \frac{1}{n}$, $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n}{n+1} = 1$, and the series diverges.

For the series $\sum \frac{1}{n^2}$, $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ and the series converges.

Similary for Root test:

For the series $\sum \frac{1}{n}$, $\rho = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, and for the series $\sum \frac{1}{n^2}$, $\rho = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$. □

STUDENTS-HUB.com

Examples: Determine if the following series converges or diverges.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$

sol: لاحظ بداية أنه يمكن حل السؤال بسرعة على أساس أنها مجموع متسلسلتين هندسيتين متقاربتين، ويمكن أيضاً الحل باستخدام اختبار المقارنة. باستخدام اختبار النسبة:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}\right) \cdot \frac{3^n}{2^n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2\cdot 2^n + 5)}{3\cdot 3^n} \cdot \frac{3^n}{2^n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{2\cdot 2^n + 5}{2^n+5} = \frac{2}{3}$$

Since $\rho < 1$, so by ratio test the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ converges.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\ n!}$

sol: $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\ (n+1)!} \cdot \frac{n!\ n!}{(2n)!}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)\ \cancel{(2n)!}\ \cancel{n!}\ \cancel{n!}}{(n+1)\ \cancel{(n!)}\ (n+1)\ \cancel{(n!)}\ \cancel{(2n)!}} = 4 > 1$$

so by ratio test, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\ n!}$ diverges.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$

sol: Consider $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$

so by root test, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$ converges.

STUDENTS-HUB.com

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Sol: حل ١ By ratio test:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \text{ converges.}$$

حل ٢ By root test:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

So $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converges.

ملحوظة: عندما يكون بالإمكان حل السؤال باستخدام اختبارى النسبة والجذر النوعى فإنه قيمة ρ فى كلا الاختبارين ستكون متساوية، وبالتالى النتائج ستكون نفسها. ولكن هناك بعض المتسلسلات يمكن حلها بأحد الاختبارين فقط كالمثال التالى:

5) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ where $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ odd} \\ \frac{1}{2^n}, & n \text{ even.} \end{cases}$

Sol: لاحظ أن المتتابعة $\{a_n\}$ هى $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{5}{2^5}, \dots\right\}$ وبالتالى المتسلسلة هى

$$\sum a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \cdots$$

لاحظ أنه يمكن حل المثال باستخدام Sandwich Thm (حاول ذلك) بـ $b_n = \sum (\frac{1}{4})^n$ مع $a_n < b_n$ وباستخدام $\sum b_n$ كـ CT

سنوضح فى هذا المثال أن اختبار النسبة يفشل ولكن اختبار الجذر النوعى ينجح.

Note that $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & n \text{ odd} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ even} \end{cases}$

So As $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ diverges

But $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ odd} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ even} \end{cases}$

So $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converges.

STUDENTS-HUB.com

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

sol:

(1 طريقة) $a_n \longrightarrow \infty \neq 0 \Rightarrow$ by nth-term test, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ diverges

(2 طريقة) By ratio test, $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ (أو أي عدد أكبر من 1)

since $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ div.

(3 طريقة) By root test, $\rho = \lim \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1 \Rightarrow$ diverges.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

sol: $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ by root test, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ converges.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

sol: Note that $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{3n}{3n+1} = 1$

so root test gives no information about the series.

But $a_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{(1/3)}{n}}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e^{1/3}} \neq 0$

so by nth-term test, the series diverges.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\, n!\, n!}{(2n)!}$

sol: $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n\, n!\, n!}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1$

so ratio test gives no information about this series.

STUDENTS-HUB.com

Note that

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1 \quad \text{so}$$

$\forall n$, $a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$

but $a_1 = 2 \Rightarrow \forall n$, $a_n > 2$. Hence $a_n \not\to 0$ and so, by nth-term test, $\sum \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$ diverges.

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$

حل1

sol: By ratio test, $\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\, 4^n}{n!\, 4^{n+1}}$

$= \infty > 1 \Rightarrow$ the series diverges.

حل2

$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{4^n} = \infty \neq 0$, so by nth-term test, the series diverges.

ملحوظة

Determine whether the following series converges or diverges.

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n (n!)}{n^3}$

sol: في هذا المثال / ولوجود $n!$ / نقوم باستخدام اختبار النسبة / لكنه يجب أنه حساب النهاية $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ لم تكن حاصلة / ولا يصح معرفة استخدام نظرية لوبيتال / ولذلك سنقوم باستخدام اختبارات المقارنة / (لماذا؟)

كما سابقاً بإثبات أن $n! < n^n$ / ولأنه اللوغاريتمات عندما $n > 1$ هي دوال متزايدة / فإنه لأي $n \in \mathbb{N}$ /

$$\log_n n! < \log_n n^n = n \log_n n = n \cdot \frac{\ln n}{\ln n} = n$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\log_n n!}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

STUDENTS-HUB.com

since $\sum \frac{1}{n^2}$ converges, then by DCT, the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n n!}{n^3}$ converges.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$

sol: Consider $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$,

so by ratio test, the series converges.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 \, 5^{n+2}}$

sol: بداية يمكنه حل السؤال باختبارات المقارنة وأيضاً باختبار النسبة وسنقوم هنا بحله باختبار الجذر الكوشي

$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{n^3}\ \sqrt[n]{5^2}\cdot\sqrt[n]{5^n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^3 \sqrt[n]{25}\cdot 5} = \frac{3}{1^3 \cdot 1 \cdot 5} = \frac{3}{5} < 1$

so by root test, the series converges.

STUDENTS-HUB.com