

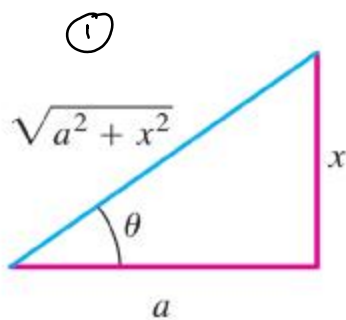
8.3 Trigonometric Substitutions

Note Title

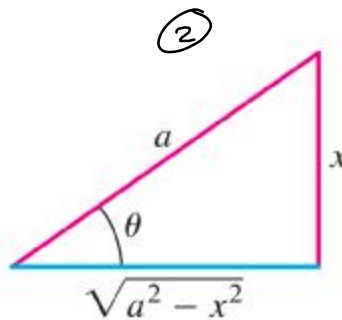
٢٢/٠٤/١٦

يستخدم هذا التحويل عندما يحتوي التكامل على إحدى الصيغ الثلاثة التالية:

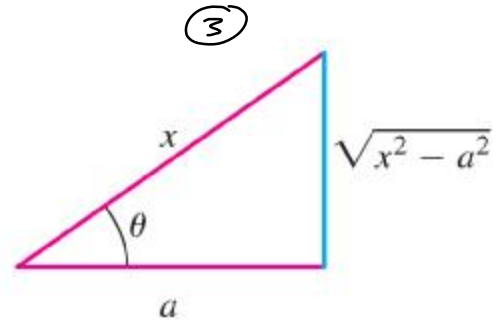
فكرة التحويل (فلسفة) هو تحويل تكامل يحتوي على x إلى تكامل يحتوي على دالة مثلثية. ولذا ستقارن طريقة التحويل (فلسفة) ، انظر (البراهين) الثلاثة التالية:



$$\frac{x}{a} = \tan \theta$$



$$\frac{x}{a} = \sin \theta$$



$$\frac{x}{a} = \sec \theta$$

في هذه الحالة يتم اختيار θ من المجال (المحدد الذي يجب) الدالة 1-1 حتى نستطيع أخذ $\theta = \tan^{-1} \frac{x}{a}$ من البرهان الأول و $\theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ من الثانية وكذلك الثانية.

شرح الطريقة:

① إذا احتوى التكامل على الصيغة $\sqrt{a^2 + x^2}$ من الدرجة الأولى نأخذ التحويل (فلسفة)

$$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta \quad \text{and}$$

$$x^2 + a^2 = a^2 \tan^2 \theta + a^2 = a^2 \sec^2 \theta$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a |\sec \theta| = \boxed{a \sec \theta}$$

② إذا احتوى التكامل على الصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$ من الدرجة الأولى نأخذ

$$x = a \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dx = a \cos \theta d\theta \quad \text{and}$$

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 \theta = a^2 \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = a |\cos \theta| = \boxed{a \cos \theta}$$

③ من الدرجة 3: إذا رجعنا إلى الصيغة $\sqrt{x^2 - a^2}$ نأخذ التحويل

ونأخذ $x = a \sec \theta$ وذلك لتسهيل حسابات هذا التحويل $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$\therefore dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta \quad \text{and}$$

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2 \tan^2 \theta$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - a^2} = a |\tan \theta| = \boxed{a \tan \theta}$$

ملحوظة: بعد حساب التكامل في θ نقوم بإعادة قيمة x باستخدام قسمة الثلاثة السابقة.

Examples:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

الحل: حل 1 يمكن حل هذا التكامل باستخدام الدوال الزائدية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

حل 2

نستخدم التحويل التالي

$$x = 2 \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow dx = 2 \sec^2 \theta d\theta \quad \text{and}$$

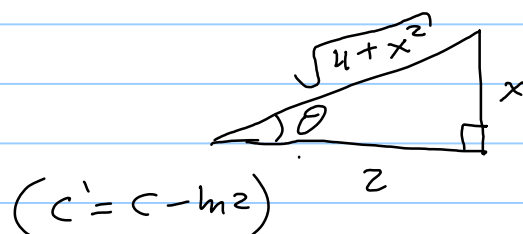
$$\sqrt{4+x^2} = 2 \sec \theta$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{2 \sec \theta}$$

$$= \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C$$

$$= \ln |\sqrt{4+x^2} + x| + C'$$



($C' = C - \ln 2$)

ملحوظة: يمكن بسهولة إثبات $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

دعنا نأخذ فانه

$$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + 1}\right) \Rightarrow$$

$$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C = \ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + 1}\right) + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$$

لاحظ أيضاً أنه إذا $x \geq 0$ فانه $\sqrt{x^2 + 4} > \sqrt{x^2} = |x|$ و بالتالي
 $|x + \sqrt{x^2 + 4}| = x + \sqrt{x^2 + 4}$ فانه

2) $\int x \sin^{-1} \frac{x}{3} dx$

Sol: By Parts: $u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$$du = \frac{\frac{1}{3} dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} = \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$dv = x dx$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int x \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}} \quad \dots (*)$$

Consider $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

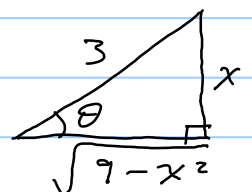
$$= \int \frac{9 \sin^2 \theta \cdot 3 \cos \theta d\theta}{3 \cos \theta}$$

$$x = 3 \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dx = 3 \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$$

$$= \int 9 \sin^2 \theta d\theta = \frac{9}{2} \int 1 - \cos 2\theta d\theta$$



$$= \frac{9}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right] + C = \frac{9}{2} \left[\theta - \sin \theta \cos \theta \right] + C$$

$$= \frac{9}{2} \left[\sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{3} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} \right] + C \rightarrow (*)$$

$$\therefore \int x \sin^{-1} \frac{x}{3} dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{4} \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3} \sqrt{9 - x^2} \right] + C$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{9}{4} \right) \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} \sqrt{9 - x^2} \right] + C$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}, \quad x > \frac{2}{5}$$

سأ: بدايةً يمكن حلها باستخدام الدوال (الزاوية) كما في مثال ١

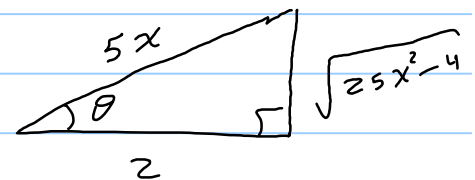
$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{4}{25}}} \quad x = \frac{2}{5} \sec \theta \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{\frac{2}{5} \sec \theta + \cancel{\tan \theta}}{\frac{2}{5} \cancel{\tan \theta}} d\theta$$

$$\therefore dx = \frac{2}{5} \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \tan \theta$$

$$= \frac{1}{5} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$



$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2} \right| + C$$

$$= \frac{1}{5} \ln |5x + \sqrt{25x^2 - 4}| + C$$