10.4 Comparison Tests (اختبارات المقارنة)

Note Title ٢٣/٠٥/١٤

في هذا الفصل نقوم بمقارنة متسلسلة $\sum a_n$ لم نستطع تحديد ما إذا كانت تقاربية أم لا مع متسلسلات أخرى للتعامل معها أسهل، كأن تكون p-series أو geometric series وهذه المقارنة تتم بطريقة تشبه إلى حد بعيد ما تم في اختبارات المقارنة للتكاملات المعتلة في sec 8.7.

THEOREM 10—The Comparison Test Let $\sum a_n$, $\sum c_n$, and $\sum d_n$ be series with nonnegative terms. Suppose that for some integer N

$$d_n \le a_n \le c_n \qquad \text{for all} \qquad n > N.$$

(a) If $\sum c_n$ converges, then $\sum a_n$ also converges.

(b) If $\sum d_n$ diverges, then $\sum a_n$ also diverges.

Examples: Discuss the convergence of the following series:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$

Sol: نلاحظ في البداية أن المتسلسلة ليست هندسية ولا تلسكوبية / ليست p-series كما أنه اختبار الحد التوفي يفشل لأنه يمكن إثبات أنه $a_n \to 0$ بإستخدام Sandwich Thm. حيث $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2+1}$ بإستخدام قواعد اختبارات / لا نستخدم اختبار التكامل لأنه تكامل الدالة صعباً.

بإستخدام اختبار المقارنة المباشر مع متسلسلة تقاربية (لماذا؟!)

$$\frac{\sin^2 n}{n^2+1} < \; ??$$

$$0 \le \sin^2 n \le 1 \quad \text{and} \quad n^2+1 > n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{\sin^2 n}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2}$$

since $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent (p-series, $p=2>1$)

so by DCT, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$ is convergent. □

STUDENTS-HUB.com

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$

Sol:

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n+3} > ??$$

$\sqrt{n}+1 > \sqrt{n}$ and $n+3 < n+n$ $\forall n > 3$

so $\frac{\sqrt{n}+1}{n+3} > \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ $\forall\ n > 3$

Since $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverges (p- series , $p = \frac{1}{2}$), then

by DCT, $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$ also diverges. Hence we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3} \quad \text{diverges}$$

(إضافة أو إزالة عدد محدود من حدود المتتابعة لا يؤثر على كونها تقاربية أو تباعدية)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

Sol: تم حل هذا المثال سابقاً باستخدام اختبار التكامل ، وهنا سنقوم بحله باستخدام اختبار المقارنة.

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} < ??$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{n}} \leq e$ (e^x is $\nearrow$ fun)

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} < \frac{e}{n^2}$$

Since $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2}$ Converges (p-series, $p = 2 > 1$), then

by DCT $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ Converges.

STUDENTS-HUB.com

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$

sol: Note that for $n \geq 2$,

$$n! = \underbrace{n(n-1)\cdots 3\cdot 2}_{n-1 \text{ من الحدود}} \geq 2\cdot 2\cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 2$$

Since $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converges (G.S. with $r = \frac{1}{2}$)

then by DCT, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converges and hence

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{converges.}$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$

sol: Since $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right) \longrightarrow \cos 0 = 1 \neq 0$, then by nth-term test, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$ diverges.

6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5}$

sol: $\frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5} > ??$

$$1 + n\ln n > n\ln n > n \quad \forall n \geq 3$$

and $$n^2 + 5 < n^2 + n^2 = 2n^2 \quad \forall n \geq 3$$

$$\therefore \frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5} > \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \quad \forall n \geq 3$$

since $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverges (p-series, $p = 1$),

then by DCT, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5}$ diverges and hence

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5}$ diverges.

STUDENTS-HUB.com

THEOREM 11—Limit Comparison Test Suppose that $a_n > 0$ and $b_n > 0$ for all $n \geq N$ (N an integer).

1. If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, then $\sum a_n$ and $\sum b_n$ both converge or both diverge.

2. If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ and $\sum b_n$ converges, then $\sum a_n$ converges.

3. If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ and $\sum b_n$ diverges, then $\sum a_n$ diverges.

Examples: Discuss the convergence of the following series.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$

Sol: هنا بحاول أحل هذا السؤال باستخدام اختبار DCT. إذا استخدام اختبار LCT.

Take $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$ and $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Note that

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverges (p-series, $p = \frac{1}{2} < 1$)

Consider $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{n+3}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n+3} = 1$

So by LCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$ is divergent.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+2}}$

Sol: Take $a_n = \frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+2}}$ and $b_n = \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converges.

Consider $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+2}}\right) \cdot n^{3/2} = \frac{2}{\sqrt{1}}$

So by LCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+2}}$ converges.

STUDENTS-HUB.com

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

Sol: تمنا بحل هذا المثال سابقاً باستخدام DCT ، وهنا سنحاول استخدام LCT .

Take $a_n = \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$, $b_n = \frac{1}{n}$. $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ div.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L.R.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2\cdot\frac{1}{n}+2n\ln n}{2n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n\cdot\frac{1}{n}+2\ln n}{2} = \infty$$

So by LCT, $\sum \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ diverges.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

Sol: (حل 1) تذكر أننا أثبتنا سابقاً أن الدالة $\ln x$ تنمو أبطأ من الدالة x^r لأي $r>0$ وبالتالي يمكننا اختيار الدالة x^r بحيث $\ln x < x^r$ عندما تكون x كبيرة بشكل كافٍ وبالتالي يمكننا استخدام العلاقة $\ln n < n^r$ لأي $r>0$ عندما n تكون كبيرة بشكل كافٍ.

Now $\ln n < n^{1/4} \Rightarrow \frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$

Since $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ conv. (p-series, $p=5/4>1$), then

by DCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ converges.

ملحوظة: تم اختيار $\ln n < n^{1/4}$ حتى تكون $\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{1}{n^{5/4}}$ وبالتالي يتم اختيار r لذلك لاحظ أنه أي اختيار أكبر لـ r من $\frac{1}{4}$ هو اختيار صحيح أيضاً.

(حل 2) Take $a_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ and $b_n = \frac{1}{n^{5/4}}$

(نختار $b_n = \frac{1}{n^{5/4}}$ أو $\frac{1}{n^q}$ لأي $1 < q < \frac{5}{4}$ ، انظر الملحوظة السابقة)

STUDENTS-HUB.com

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{5/4}}$ conv. (p-series, $p = 5/4 > 1$)

Consider $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) \cdot n^{5/4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} 0.$

$\Rightarrow$ By LCT, $\sum \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ converges.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

الحل: LCT باستخدام اختبار المقارنة النهائية وباستخدام $\frac{1}{n^2}$ يمكن حل السؤال بسهولة

Now using LCT, take $a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ and $b_n = \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges (p-series, $p = 2 > 1$)

Consider $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right) \cdot n^2 = 1$

so, by LCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ converges.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

الحل: (حاول حلها) DCT لاحظ أنه يمكن حل السؤال بسهولة باستخدام

Take $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$, $b_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converges G.S. with $r = \frac{1}{2}$ and $|r| = \frac{1}{2} < 1$.

Consider $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.R.}{=} 1$

so by LCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ converges.

STUDENTS-HUB.com

ملحوظة

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$

Sol: $\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < ??$

$2^n + \sqrt{n} > 2^n \quad \forall n$, so $\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$

Since $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converges, then by DCT,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$ Conv.

حاول حل السؤال باستخدام LCT بمقارنتك بـ $b_n = \frac{1}{2^n}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\cos(2n-1) + n^2}$

Sol: $\frac{\sqrt{n}}{\cos(2n-1) + n^2} < ??$

$\cos(2n-1) > -1$

$\therefore \quad \cos(2n-1) + n^2 > n^2 - 1 > n^2 - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2} \quad \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\cos(2n-1) + n^2} < \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{3/2}}$

Since $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ converges, (p-series, $p = \frac{3}{2} > 1$)

then by DCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\cos(2n-1) + n^2}$ converges.

لاحظ أنه عادةً $a_n < b_n$ تتحقق لكل $n \geq 2$ ورغم ذلك فلأن المتسلسلة ابتداءً من $n=1$ تقاربية وذلك لأنه إضافة عدد محدود من الحدود المتتابعة لا يؤثر على كونها تقاربية أم لا.

STUDENTS-HUB.com

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Sol: إذا حاولنا حل السؤال باستخدام اختبارات المقارنة سنجد صعوبة كبيرة ولن نستطيع حله بالسهولة التي حللت بها أمثلة سابقة اجتوت على ln n ، فإذا قمنا بعمل رتبة بمتسلسلة تقاربية / تكون النهاية ∞ ونفشل الاختبار / وعلى العكس إذا أخذنا مقارنة بمتباعدية تكون النهاية 0 ونفشل الاختبار أيضاً . (حاول وجرب) .

Using integral test, Let $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \geq 2$

clearly, 1) f is cont. on $[2, \infty)$

2) f is positive $\forall x \geq 2$.

3) $f' = \frac{-(1+\ln x)}{(x \ln x)^2} < 0 \quad \forall x \geq 2$

consider $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x}$

$u = \ln x$

$du = \frac{dx}{x}$

$x = 2 \rightarrow u = \ln 2$

$x = b \rightarrow u = \ln b$

$= \lim_{b \to \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{u}$

$= \lim_{b \to \infty} \ln|u| \Big]_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b \to \infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = \infty$

so $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverges.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$

Sol: Note that $a_n \to 0$.

Using LCT, take $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges (p-series, $p = 2 > 1$) .

Consider $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

STUDENTS-HUB.com

$$\overset{L.R}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right) * \pi * \frac{-4n}{(2n^2-1)^2}}{\left(-2/n^3\right)} = \frac{\pi}{2}$$

so by LCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$ converges.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n-1}\right)$

الحل: هذا المثال بطريقة مشابهة لما تم في (4) ولكن بمقارنته بـ $b_n = \frac{1}{n}$ وبالتالي سيكون متباعداً.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n + n}$

الحل: لأنه 3^n أسرع في النمو من n ومن n^2 فإنه كلما كبر n كلما كانت تأثيرها أكبر عندما تكبر n ستكون لـ 3^n وعليه فإننا نتوقع لهذه المتسلسلة أنها تكون تقاربية

$$\frac{n^2}{3^n + n} < \; ??$$

أيضاً 2^n أسرع في النمو من n^2 لذلك $n^2 < 2^n$

and

$$3^n + n > 3^n \Rightarrow \frac{n^2}{3^n+n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Now, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converges (G.S. with $r = \frac{2}{3}$)

then by DCT, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+n}$ converges.

STUDENTS-HUB.com